Kalkulus 2, 8. hét

Potenciálszámítás

I. Potenciálszámítás.
Az alábbi $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezőknek létezik-e (skalár)potenciálja az adott V tartományban, és ha igen, határozzuk meg a potenciált.

1. $v(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0\right\}$
2. $v(r) = \frac{r}{\|r\|^2} \qquad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
3. $v(x,y,z) = (y,x,0) \qquad V = \mathbb{R}^3$
4. $v(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x}, 0\right) \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\right\}$
5. $v(x,y,z) = \left(\frac{-y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}, 0\right) \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < y\right\}$
6. $v(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \qquad V = \mathbb{R}^3$
7. $v(x,y,z) = \left(\frac{\operatorname{ch} z^2}{x}, \frac{\operatorname{ch} z^2}{y}, 2z\ln(xy)\cdot \operatorname{sh} z^2\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
8. $v(x,y,z) = \left(2x\,\mathrm{e}^{yz} - z\sin(xz), zx^2\,\mathrm{e}^{yz} + y, yx^2\,\mathrm{e}^{yz} - x\cos(xz)\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
9. $v(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right) \qquad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Ívhosszszámítás és vonalmenti integrál

I. Ívhosszszámítás.

1. Mekkora a $\Gamma = \left\{(3\cos t, 2t, 3\sin t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, 2\pi]\right\}$ görbe ívhossza?
2. Mekkora a $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,9]\,,\ y = x^{\frac{3}{2}}\right\}$ görbe ívhossza?
3. Mekkor az $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $r(\varphi) = \varphi$ esetén az $(r(\varphi), \varphi)$ polárkoordinátákkal adott görbe ívhossza, ha $\varphi \in [0, 2\pi]$?

II. Vonalmenti integrál.
Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ görbe menti integrálját, ahol

1. $f(x,y,z) = (y^2 - x^2, 2yz, -x^2)$, $I = [0, \pi]$ és $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$;
2. $f(x,y,z) = (y + z^2, x + z, x + y)$ és γ az $A = (0,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (1,1,1)$ háromszög oldala az $A \to B \to C \to A$ bejárással;
3. $f(x,y,z) = \left(\frac{2xy^2}{z^2}, \frac{2x^2y}{z^2}, -\frac{2x^2y^2}{z^3}\right)$ és γ_1 az $x^2 + z^2 = 1$ és $y = 2$ felületek metszésvonala,

valamint γ_2 az $x^2+y^2=1$ és $z=1$ felületek metszésvonala;

4. $f(x,y,z)=(2yz+x^2, 2xz+y^2, 2xy+z^2)$ és γ tetszőleges folytonosan differenciálható görbe a $(2,1,3)$ és a $(-1,3,-2)$ pontok között;
5. $f(x,y,z)=(xy,y^2,xz)$, $I=[0,1]$ és $\gamma(t)=(t,t^2+1,\exp(t))$;
6. $f(x,y,z)=(xy,y,0)$, $I=[0,\pi]$ és $\gamma(t)=(t-\sin t, 1-\cos t, 0)$ (ciklois);
7. $f(x,y,z)=(-y,x,0)$ és γ_1 az $A=(0,1,0)$ és a $B=(1,0,0)$ pontokat összekötő egyenesvonal, valamint γ_2 a $z=0$ síkban lévő origó középpontú kör negyedíve az $A=(0,1)$ és a $B=(1,0)$ pontok között.

Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel

I. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Legyen F a $z=4-x^2-y^2$ felület $z\geq 0$ része, és az n normális vektorára teljesüljön az $\langle n,(0,0,1)\rangle \geq 0$ egyenlet. Továbbá legyen
$$v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z)\mapsto (xz^2, zy^2, yx^2)$$
Határozzuk meg az $\displaystyle\iint_F \operatorname{rot} v \,\mathrm{d}F$ integrál értékét.
2. Számoljuk ki a
$$v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z)\mapsto (x^3,y^3,z^3)$$
vektormező fluxusát a $9z^2=x^2+y^2$, $z=1$ egyenletek által meghatározott kúpfelületen, ha a felület normálisát kifele irányítjuk.
3. Legyen
$$v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z)\mapsto (x,y,-2z),$$
és legyen F az $y=x^2+4z^2$ paraboloid $0\leq y\leq 4$ része $\langle n,(0,1,0)\rangle\rangle \geq 0$ irányítással, ahol n a felület normálvektora. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint_F v\,\mathrm{d}F$ integrál értékét.

II. Keressük meg a hibát az alábbi gondolatmenetekben.

1. Legyen v egy nyugvó ponttöltés elektromos tere, vagyis
$$v:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3 \qquad r\mapsto \frac{r}{\|r\|^3}.$$
Mivel $\operatorname{div} v=0$ ezért az R sugarú nulla középpontú gömbre integrálva a $\operatorname{div} v$ függvényt nullát kapunk. Az R sugarú gömbhéjra vett integrálja a v vektormezőnek viszont 4π. Azonban $0\neq 4\pi$!
2. Legyen v egy egyenárammal átjárt végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere, vagyis
$$v:\mathbb{R}^3\setminus((0,0)\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3 \qquad (x_1,x_2,x_3)\mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}(-x_2,x_1,0).$$
Ekkor $\operatorname{rot} v=0$, vagyis az $x_3=0$ síkban a nulla középpontú R sugarú körlapra integrálva a $\operatorname{rot} v$ függvényt nullát kapunk. Az előbbi kör határán vett integrálja a v vektormezőnek viszont 2π. Azonban $0\neq 2\pi$!

III. Green-formulák.

Legyen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, reguláris határú halmaz és $u_1, u_2 \in C^2(V, \mathbb{R})$. Ekkor

$$\iiint_V u_1 \Delta u_2 + \langle \operatorname{grad} u_1, \operatorname{grad} u_2 \rangle \; \mathrm{d}\,\mu_V = \iint_{\partial V} u_1 \operatorname{grad} u_2 \; \mathrm{d}\,\mu_{\partial V}$$

$$\iiint_V u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1 \; \mathrm{d}\,\mu_V = \iint_{\partial V} u_1 \operatorname{grad} u_2 - u_2 \operatorname{grad} u_1 \; \mathrm{d}\,\mu_{\partial V}$$

teljesül, amit aszimmetrikus, illetve szimmetrikus Green-formulának nevezünk.

Számoljuk ki a Green-formulák jobb illetve bal oldalán álló mennyiségeket az alábbi esetekben.

1. Legyen V az origó körüli R sugarú gömb, $u_1(r) = \|r\|^2$ és $u_2(r) = \ln \|r\|$.
2. Legyen V az origó körüli R sugarú gömb, $u_1(r) = \langle a, r \rangle^2$, ahol $a \in \mathbb{R}^3$, és $u_2(r) = \ln \|r\|$.