Kalkulus 2, 7. hét

Integrálások sorrendjének felcserélése

I. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét az integrálás sorrendjének a felcserélésével!

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y\cos(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$
3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 ye^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

II. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

1. $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \int_0^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^4 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Területszámítás és kettős integrál

I. Területszámítás.

1. Legyen $c\in\mathbb{R}^+$. Mekkora az $xy=1$, $xy=4$, $y=x^2$ és az $y=cx^2$ görbék által meghatározott korlátos tartomány területe?
2. Legyen $R\in\mathbb{R}^+$, $d\in[0,2R]$. Mekkora a $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le R^2,\ (x-d)^2+y^2\le R^2\right\}$ tartomány területe?
3. Legyen $a,b\in\mathbb{R}^+$. Mekkora a $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$ tartomány területe?
4. Mekkora a $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1,\ x^2\le y\right\}$ tartomány területe?

II. Kettős integrál.
Adott $T\subseteq\mathbb{R}^2$ halmaz és $f:T\to\mathbb{R}$ folytonos függvény esetén számoljuk ki a $\displaystyle\iint_T f$ integrált!

1. Legyen $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\ge 1,\ (x-2)^2+y^2\le 4\right\}$ és $f(x,y)=xy$.
2. Legyen $a\in\mathbb{R}^+$ és $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \exists t\in[0,2\pi]: x=a(t-\sin t),\ 0\le y\le a(1-\cos t)\right\}$, valamint $f(x,y)=y^2$.
3. A T halmaz a (0,0), (3,0), (2,1) és (1,1) pontok által meghatározott trapéz és $f(x,y)=3x-y^2$.
4. A T halmaz az $x=2$, $y=x$ és az $y=\dfrac{1}{x}$ görbék által határolt korlátos tartomány és $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$.

5. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1/2\right\}$ és $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.
6. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\right\}$ és $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.
7. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le x,\ 0 \le y\right\}$ és $f(x,y) = x^2 y$.
8. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le 4x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le x\right\}$ és $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{4x^2+y^2}$.
9. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 9x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0\right\}$ és $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{9x^2 + \frac{y^2}{4}}}$.

Felszínszámítás és felületi integrál

I. Felszínszámítás.
Határozzuk meg az alábbi felületek felszínét.

1. Az origó középpontú $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb.
2. Csavarfelület, melynek paraméterezése
$$P : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u + v).$$
3. Tórusz, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \le a$ és a paraméterezés
$$P : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (\vartheta, \varphi) \mapsto ((a + b\cos\varphi)\cos\vartheta, (a + b\cos\varphi)\sin\vartheta, b \sin\varphi).$$
4. Ellipszis, melynek féltengelyei a, a, b $(a, b \in \mathbb{R}^+)$.

II. Felületi integrál.
Határozzuk meg az adott függvények integrálját a megadott F felületeken.

1. Legyen $f(x,y,z) = xyz$ és F az a felület, melynek paraméterezése
$$P : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (u\cos v, u \sin v, u^2).$$
2. Legyen $v(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{xz}, \dfrac{1}{yz}, \dfrac{1}{xy}\right)$ és F az a felület, melynek paraméterezése
$$P : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (\cos^3 u \cos v, \cos^3 u \sin v, \sin^3 u).$$
3. Legyen $v(x,y,z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \,\mathrm{sh}\, z + y^2, 0\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \ge 0$ része.
4. Legyen $v(x,y,z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \,\mathrm{sh}\, z + y^2, z\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z > 0$ része.
5. Legyen $v(r) = \|r\|^3 \cdot (r \times (0,0,1))$ és F a $z = 0$ sík $x^2 + y^2 \le 1$ része, valamint a felület n normálvektorára $n(0,0,1) \ge 0$ teljesüljön.
6. Legyen $v(x,y,z) = (x, 3x, -2z)$, és legyen F annak a kúppalástnak a csúcspont és a vezérgörbe közötti része, amelynek csúcspontja $(1,2,3)$, vezérgörbéje pedig a $z = 1$ síkban $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, a $n(0,0,1) \ge 0$ irányítással.
7. Legyen $v(x,y,z) = (x,y,z)$, és legyen F az
$$r : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (\cos v(3 + \cos u), \sin v(3 + \cos u), \sin u)$$
paraméterezésű tóruszdarab befele vett irányítással (vagyis mutasson az n normálvektor a felület által körülzárt korlátos térrész felé).

Térfogatszámítás és hármas integrál

I. Térfogatszámítás.

Határozzuk meg az alábbi $V \subseteq \mathbb{R}^3$ halmazok térfogatát!

1. Legyen V az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű hengernek a $z = 0$ és az $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok közé eső része.
2. Legyen V az a gömbhéjcikk, melyet a gömbi koordinátákkal adott $r = 1$ és $r = 2$ sugarú gömbök és a $\vartheta = \pi/4$ és a $\vartheta = \pi/3$ síkok határolnak.
3. Legyen V a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ felületek közé eső rész.
4. Legyen V a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$ sík és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ henger határolt korlátos térrész.
5. Legyen V a $z = 0$, $z = 2y^2 + 8x$, $y = 1 - 2x$, $y = x$ és az $x = 0$ felületekkel határolt korlátos tartomány.
6. Legyen V az $R \in \mathbb{R}^+$ középsugarú és $r \in]0, R[$ gyűrűsugarú tórusz.
7. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}$.
8. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ (x - R)^2 + y^2 + z^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}$.
9. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x^2 + y^2 \leq R^2,\ y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$.
10. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x^2 + y^2 \leq R^2,\ y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + z^2 \leq R^2\right\}$.
11. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xy - 4yz \leq R^2\right\}$.

II. Hármas integrál.

Adott $T \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz és $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén számoljuk ki a $\iiint\limits_T f$ integrált!

1. Legyen T a $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ és a $z = 0$ egyenletek által meghatározott korlátos tartomány, és $f(x,y,z) = xy^2z^3$.
2. Legyen T a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 1$ felületekkel határolt korlátos tartomány és $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Legyen T a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ és az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = xyz$.
4. Legyen T a $z \geq 2$ és a $z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = 2z$.
5. Legyen T a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ és a $2z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = xy^2z^3$.
6. Legyen T a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és a $3z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = x^2z$.
7. Adott $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ paraméterek esetén legyen $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ és
$$f(x,y,z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$
8. Legyen $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 5x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 6xy - 4yz - 4xz \leq 1\right\}$ és $f(x,y,z) = 1$.