Kalkulus 2, 6. hét

Inverzfüggvény-tétel

I. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$.

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható.
2. Legyen $g = f^{-1}$. Igazoljuk, hogy $g'(0) = 1$ és $g'(10) = \dfrac{1}{13}$.

II. Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (x^3 y + xz^2, x^3 + x^2 - yz, x^2 + z^2 - xyz).$$

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható az $(1, 1, 1)$ pont egy U környezetében.
2. Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Határozzuk meg a $(\mathrm{D}\, g)(2, 1, 1)$ lineáris leképezést.

Implicitfüggvény-tétel

I. Igazoljuk hogy az $y^2 x + y^3 = 1$ egyenlet egy $y(x)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $x_0 = 0$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $y'(0)$ értékét!

II. Igazoljuk, hogy az

$$x \cos y^2 + \frac{2y}{x+2} + y = 2x$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $(0, 0)$ ponton, valamint írjuk fel ennek az $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $(0, 0)$ pontbeli érintőegyenesének az egyenletét!

III. Igazoljuk, hogy az

$$y + x^2 \sin y + \sin x = 1$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ponton. Milyen lokális tulajdonsága van az implicit módon adott $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pontban?

IV. Igazoljuk hogy az $xy - 2\,\mathrm{e}^{x-y} - 2z + \mathrm{e}^z = 0$ egyenlet egy $z(x, y)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $(1, 1)$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $z'_x(1, 1)$ és $z'_y(1, 1)$ értékét!

V. Tekintsük az

$$\begin{aligned} x^2 u + y^2 u^2 + z^2 u^3 + v &= 4 \\ x^4 v^2 + y^2 uv &= -4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Legyen $a = (1, 2, -1)$ és $b = (1, 0)$. (Ekkor az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$, $u_0 = 1$ és $v_0 = 0$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer.) Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt környezete az a pontnak és olyan $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ függvény, melyre $\varphi(a) = b$ és minden $(x, y, z) \in \Omega$ esetén az $u = \varphi_1(x, y, z)$ és a $v = \varphi_2(x, y, z)$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer. Igazoljuk továbbá, hogy

$$(\mathrm{D}\, \varphi)(a) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -26 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

teljesül.

VI. Termodinamikában állapotegyenletnek nevezzük valamely anyag nyomása p, térfogata V és hőmérséklete között fennálló $f(p,V,T) =$ áll összefüggést. Tegyük fel, hogy állapotegyenletet leíró $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, és legyen $a = (p_0, V_0, T_0) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $(\partial_p f)(a), (\partial_V f)(a), (\partial_T f)(a) \neq 0$.

1. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz, hogy minden $v \in U$ elemre $(\partial_p f)(v), (\partial_V f)(v), (\partial_T f)(v) \neq 0$.
2. Mutassuk meg, hogy létezik olyan

$$\begin{aligned}
p &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (V,T) \mapsto p(V,T) \\
V &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (p,T) \mapsto V(p,T) \\
T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (p,V) \mapsto T(p,V)
\end{aligned}$$

függvény, hogy

$$\begin{array}{lll}
(V_0, T_0) \in \operatorname{Dom} p, & p(V_0, T_0) = p_0, & \forall (V,T) \in \operatorname{Dom} p : \ f(p(V,T), V, T) = f(a) \\
(p_0, T_0) \in \operatorname{Dom} V, & V(p_0, T_0) = V_0, & \forall (p,T) \in \operatorname{Dom} V : \ f(p, V(p,T), T) = f(a) \\
(p_0, V_0) \in \operatorname{Dom} T, & T(p_0, V_0) = T_0, & \forall (p,V) \in \operatorname{Dom} T : \ f(p, V, T(p,V)) = f(a)
\end{array}$$

teljesül.
3. Igazoljuk, hogy az előző pontban szereplő függvényekre

$$\left.\frac{\partial p(V,T)}{\partial V}\right|_{(V,T)=(V_0,T_0)} \cdot \left.\frac{\partial V(p,T)}{\partial T}\right|_{(p,T)=(p_0,T_0)} \cdot \left.\frac{\partial T(p,V)}{\partial p}\right|_{(p,V)=(p_0,V_0)} = -1$$

$$\left.\frac{\partial p(V,T)}{\partial T}\right|_{(V,T)=(V_0,T_0)} \cdot \left.\frac{\partial V(p,T)}{\partial p}\right|_{(p,T)=(p_0,T_0)} \cdot \left.\frac{\partial T(p,V)}{\partial V}\right|_{(p,V)=(p_0,V_0)} = -1$$

teljesül.

Az alábbi függvények példák állapotegyenletekre.

$$\begin{array}{lll}
f(p,V,T) = \dfrac{pV}{T}, & & (\textit{ideális gáz}) \\
f(p,V,T) = \left(p + \dfrac{a}{V^2}\right) \cdot \dfrac{V-b}{T}, & a, b \in \mathbb{R}^+ & (\textit{Van der Waals-egyenlet}) \\
f(p,V,T) = \dfrac{p(V-nb)}{T} \cdot \exp\left(\dfrac{an}{RTV}\right), & a, b, n, R \in \mathbb{R}^+ & (\textit{Dieterici-egyenlet})
\end{array}$$