Kalkulus 2, 5. hét

Taylor-sorfejtés

I. Mutassuk meg, hogy az

1. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ függvény $P = (0,0)$ bázispontú másodfokú Taylor-polinomja a $h = (a,b)$ helyen
$$T^f_{2,P}(h) = 1 - \frac{a^2+b^2}{2};$$
2. $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}$ függvény $P = (1,1,1)$ bázispontú másodfokú Taylor-polinomja a $h = (a,b,c)$ helyen
$$T^f_{3,P}(h) = 1 + (a+b-c) + (ab - ac - bc + c^2).$$

Lokális szélsőérték

I. Keressük meg az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit (ahol $k \in \mathbb{R}$).

$$f(x,y) = (x-2y)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \qquad g(x,y) = (1+\mathrm{e}^y)\cos x - y\,\mathrm{e}^y \qquad h(x,y) = kx^2 + xy + y^2 + 3x - 3y$$

II. Keressük meg az f függvény szélsőértékeit a T halmazon, ahol

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 + x + y$ és $T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\big\}$;
2. $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ és $T = [0,\pi]^3$;
3. $f(x,y,z) = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{b}$ valamely $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméterre és $T = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;
4. $f(x,y) = x^2y(2-x-y)$ és $T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le 6\big\}$;
5. $f(x,y) = (y+2x-4)^2 + (x+y)^2$ és $T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le 1\big\}$.

III. Keressük meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit a megadott feltételek mellett.

1. Legyen $f(x,y,z) = xyz$, az $x^2+y^2+z^2 = 1$ és $x+y+z = 0$ feltétel mellett.
2. Legyen $f(x,y,z) = xy + yz$, az $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ és az $x, y, z \ge 0$ feltétel mellett.
3. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$ és $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$ a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = a$ és az $x_1, \ldots, x_n \ge 0$ feltétellel.

IV. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, valamint legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$, ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Definiáljuk a $q = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ vektort, és tegyük fel, hogy a q és az x vektor lineárisan független. Igazoljuk, hogy a

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2$$

függvénynek az

$$\alpha_0 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \qquad \beta_0 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

pontban van lokális minimuma, amit az

$$\alpha_0 = \frac{\|q\|^2 \langle x, y\rangle - \langle x, q\rangle \langle y, q\rangle}{\|q\|^2 \|x\|^2 - \langle x, q\rangle^2} \qquad \beta_0 = \frac{\|x\|^2 \|q\|^2 \langle y, q\rangle - \langle x, q\rangle \langle x, y\rangle}{\|q\|^2 \|x\|^2 - \langle x, q\rangle^2}$$

alakban is felírhatunk a skaláris szorzás segítségével.

V. Tegyük fel, hogy egy edény 10 ml kénsavat tartalmaz kezdetben. Rendelkezésünkre áll 1 l víz, hogy csökkentsük a kénsav mennyiségét oly módon, hogy valamennyi vizet öntünk az edénybe, az teljesen elkeveredik a kénsavval, majd kiöntés után marad mindig 10 ml folyadék az edényben, és ezt a lépést ismételhetjük addig, amíg a rendelkezésünkre álló 1 l víz el nem fogy. Mennyi kénsav fog biztosan maradni az edényben, akármilyen módon is használjuk fel az 1 l vizet?

VI. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \frac{1}{2}y^4 - \cos\left(x^2\right) + ax^2y^2 - xy^3 - x^3y.$$

1. Mutassuk meg, hogy a $(\mathrm{D}\, f)(x, y) = 0$ egyenletből $(x, y) = (0, 0)$ következik.
2. Igazoljuk, hogy $(\mathrm{D}^2 f)(0, 0) = 0$ és $(\mathrm{D}^3 f)(0, 0) = 0$.
3. Mutassuk meg, hogy az $A = (\mathrm{D}^4 f)(0, 0)$ 4-lineáris leképezésre

$$A((x, y),(x, y),(x, y),(x, y)) = x^4 + y^4 + 2ax^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3$$

teljesül.
4. Mutassuk meg, hogy ha $a \in \,]1, \infty[$, akkor az f függvénynek lokális minimuma van a $(0, 0)$ pontban.