Kalkulus 2, 4. hét

Gradiens, divergencia és rotáció

I. Legyen $E_1 = \mathbb{R}^3$ és $E_2 = \mathbb{R}^2$. Határozzuk meg az

$$f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \big((x,y,z),(u,v)\big) \mapsto \left(\frac{x^2}{1+u^2+\mathrm{e}^y}, vz^2\right)$$

függvény parciális deriváltjait az $a = \big((1,-1,2),(-2,3)\big)$ pontban.

II. Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1 x_2^2 x_3^3.$$

1. Számoljuk ki az f függvény gradiensét az $a = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ pontban.
2. Adjuk meg a $\operatorname{grad} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt.
3. Számoljuk ki az Δf függvényt.

III. Legyen $f(t) = \left(t^2 - t, \dfrac{1}{1+t^2}, \mathrm{e}^t\right)$, $g(x,y,z) = x^2 y - z$ és $t_0 = 1$. Határozzuk meg a $g \circ f$ és a $f \circ g$ függvény deriváltját a t_0 pontban a közvetett függvény deriválási szabálya alapján, valamint közvetlen számolással.

IV. Igazoljuk, hogy az

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

függvényre $\Delta u = 0$ teljesül!

V. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket, ahol r az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény és $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. $\operatorname{grad} \log \|r\|^3$	2. $\operatorname{grad} \|r\|^5$	3. $\operatorname{grad} f(\|r\|)$
4. $\operatorname{div}(\lvert r\rvert \cdot \operatorname{grad} \ln \lvert r\rvert^3)$	5. $\operatorname{div} \operatorname{grad} \lvert r\rvert^5$	6. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\lvert r\rvert)$

VI. Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

1. Ha $U_1, U_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(U_1+U_2) &= \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2 \\ \operatorname{grad}(cU_1) &= c \operatorname{grad} U_1 \\ \operatorname{grad}(U_1 U_2) &= U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1. \end{aligned}$$

2. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_1+V_2) &= \operatorname{div} V_1 + \operatorname{div} V_2 \\ \operatorname{div}(cV_1) &= c \operatorname{div} V_1 \\ \operatorname{div}(UV_1) &= U \operatorname{div} V_1 + \langle V_1, \operatorname{grad} U \rangle. \end{aligned}$$

3. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(V_1 + V_2) &= \operatorname{rot} V_1 + \operatorname{rot} V_2 \\ \operatorname{rot}(cV_1) &= c \operatorname{rot} V_1 \\ \operatorname{rot}(UV_1) &= U \operatorname{rot} V_1 + (\operatorname{grad} U) \times V_1. \end{aligned}$$

VII. Legyen $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $V \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{div} \operatorname{rot} V = 0$ és $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$.

VIII. Legyen $V \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, a $V = (V_1, V_2, V_3)$ komponensekkel és legyen $\Delta V = (\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)$. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} V = \operatorname{grad} \operatorname{div} V - \Delta V$$

teljesül.

IX. Laplace-operátor polár- és gömbi-koordinátarendszerekben.

1. Legyen $H = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq 0\}$, $G = \mathbb{R}^2 \setminus H$, és a polárkoordinátázás legyen

$$P : \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\to G \qquad (r, \varphi) \to (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(G, \mathbb{R})$, akkor

$$\Delta f = \quad \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = \partial_{rr}(f \circ P) + \frac{1}{r} \partial_r (f \circ P) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi}(f \circ P)$$

teljesül, vagyis ha a G síkrészben az (r, φ) polárkoordinátákat használjuk az $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ függvény megadására, akkor

$$\Delta f = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] f(r, \phi).$$

2. Legyen $H = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \leq 0\}$, $G = \mathbb{R}^3 \setminus H$, és a gömbi koordinátázás legyen

$$P : \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[\to G \qquad (r, \vartheta, \varphi) \to (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta).$$

Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(G, \mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned} \Delta f = & \quad \partial_{xx} f + \partial_{yy} f + \partial_{zz} f = \\ & = \partial_{rr}(f \circ P) + \frac{2}{r} \partial_r (f \circ P) + \frac{1}{r^2} \left(\partial_{\vartheta\vartheta}(f \circ P) + (\operatorname{ctg} \vartheta) \partial_\vartheta (f \circ P) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_{\varphi\varphi}(f \circ P) \right) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha a G térrészben az (r, ϑ, φ) gömbi koordinátákat használjuk az $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ függvény megadására, akkor

$$\Delta f = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] f(r, \vartheta, \varphi).$$

X. Mutassuk meg, hogy a Laplace-egyenlet invariáns az inverzióra. Legyen $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, amit gömbi koordinátarendszerben $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ alakban írunk fel. Igazoljuk, hogy ha $\Delta \Phi = 0$, akkor a $\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{R}{r} \Phi \left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi \right)$ függvényre is teljesül a $\Delta \Psi = 0$ egyenlet, tetszőleges $R \in \mathbb{R}$ paraméter mellett.

4. hét, Kalkulus 2, 2017.02.27., Andai Attila