Kalkulus 2, 3. hét

Parciális deriváltak és deriváltak

I. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

függvény nem folytonos a nullában, de itt léteznek a parciális deriváltjai.

II. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olyan differenciálható függvény, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\|f(x)\| = 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ elemre $\langle (\mathrm{D}\, f)(x), f(x) \rangle = 0$.

III. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

függvény parciális deriváltjai nem folytonosak a $(0,0)$ pontban, de az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban.

IV. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \sqrt{|xy|}$$

függvény folytonos, léteznek a parciális deriváltjai, de az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

V. Differenciálhatók-e az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban?

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
4. $$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{(x+3)y^2}{x^2+2y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
5. $$f(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2}$$
6. $$f(x,y) \begin{cases} x^3y^4 \sin\dfrac{1}{y}, & \text{ha} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases}$$

VI. Vizsgáljuk az

$$f(x,y) = 3y + \mathrm{e}^{xy^2} - 2y \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad g(x,y) = (3x^2+1)^{2y^3}$$

függvényeket.

1. Határozzuk meg azt a legbővebb tartományt, ahol az f és a g függvény jól definiálható!
2. Számoljuk ki az $\big((\mathrm{D}\, f)(0,1)\big)(x,y)$ és a $\big((\mathrm{D}\, g)(0,1)\big)(x,y)$ értéket!
3. Írjuk fel a $P_0 = (0,1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét.
4. Legyen $a \in \mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, mely párhuzamos a $(2,-7)$ vektorral. Számoljuk ki az f függvény a iránymenti deriváltját a $(0,1)$ pontban.

VII. Határozzuk meg, hogy mely irányhoz tartozik az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény legnagyobb iránymenti deriváltja a $P_0 \in \mathbb{R}^2$ pontban, ha

1. $f(x,y) = \dfrac{y^3}{\mathrm{e}^{2x+1}}$ és $P_0 = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$;
2. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ és $P_0 = (1,1)$.

VIII. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $x\dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}(xy) = y\dfrac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}(xy)$
2. $\dfrac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}(xy\,\mathrm{e}^{x+y}) = (i+x)(k+y)\,\mathrm{e}^{x+y}, \quad i,k \in \mathbb{N}$
3. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)((\sin x)(\sin y)) = 0$
4. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\right) = 0$

Érintősík

I. Írjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z = 6$ síkkal párhuzamos érintősíkjainak az egyenletét.

II. Tekintsük az $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x,y,z\right\}$ térrészben (amelynek neve *pozitív ortáns*) a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

felületet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből a összegű darabokat vágnak le. (Azaz, ha az érintősík az x', y' és z' helyen metszi a koordinátatengelyeket, akkor $x' + y' + z' = a$.)

III. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy a

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

függvény érintősíkjai átmennek az origón.