Kalkulus 2, 2. hét

Folytonosság

I. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek, és ha léteznek, számoljuk ki azokat!

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x-y}{xy+x+y}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\frac{x}{y}$
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$
11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2y)}{x^2+y^2}$
12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$
13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$
14. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^3y^3}}{x^2+y^2}$
15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} \frac{1}{xy}\operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{1+xy}\right)$

II. Folytonosak-e az

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0);\end{cases} \qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{ha} \quad xy\neq 0,\\ 0 & \text{ha} \quad xy=0;\end{cases}$$

$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban?

III. Tekintsük az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvényt.

1. Folytonos-e az f függvény az origón átmenő egyenesek mentén?
2. Folytonos-e f a $(0,0)$ pontban?

IV*. Mutassuk meg, hogy egy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha $\Gamma(f)$ összefüggő és $(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R})\setminus\Gamma(f)$ nem összefüggő (ahol $\Gamma(f)=\big\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\in\mathbb{R}\big\}$.

Skaláris szorzás

I. A $V=\mathbb{R}^2$ vektortéren mely $p,q\in\mathbb{R}$ paraméter esetén lesz

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad ((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto x_1y_1+4x_2y_2-px_1y_2-qx_2y_1$$

skaláris szorzás?

II. Igazoljuk valós V vektortérben az alábbi következtetéseket.

1. $(x+y) \perp (x-y)$ pontosan akkor, ha $\|x\| = \|y\|$;
2. ha $\|x\| = \|y\| = 1$ és $x \perp y$, akkor $\|x-y\| = \sqrt{2}$;
3. ha x_1, x_2, x_3, x_4 ortonormált rendszer, akkor a

$$(x_1+x_2), (x_1-x_2), (x_3+x_4), (x_3-x_4)$$

   vektornégyes ortogonális rendszert alkot;
4. az $\{y \in V | x \perp y\}$ halmaz altér V-ben.

III. Skaláris szorzást definiálnak-e a V vektortéren az alábbi kifejezések?

1.	$V = C^1([0,1], \mathbb{R})$	$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$
2.	$V = C^1([0,1], \mathbb{R})$	$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'g'$
3.	$V = C^1([0,1], \mathbb{R})$	$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'g' + f(0)g(0)$
4.	$V = \mathbb{R}^3$	$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_3y_3$
5.	$V = \mathbb{R}^3$	$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$