Kalkulus 2, 1. hét

Topológia

I. Adja meg az alábbi halmazok belső, torlódási, határ és izolált pontjait, valamint a lezártját és a belsejét.

a.) $\left\{ \dfrac{-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\} \cup]3,4]$

b.) $\left\{ \left(\dfrac{-1}{n}, \dfrac{-1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\} \cup]3,4] \times \{0\}$

c.) $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x,\ 0 < y < x^2 \right\}$

d.) $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ y = \sin \dfrac{1}{x} \right\}$

e.) $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x,\ y < \sin \dfrac{1}{x} \right\}$

II. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}^+$, $k \leq n$. Bizonyítsuk be, hogy

a.) a $\mathrm{pr}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ projekció függvény folytonos;

b.) minden $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz esetén $\mathrm{pr}_k(U) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz.

III. A folytonosság topologikus jellemzésével igazoljuk, hogy

a.) a $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y,\ x^2 + y^2 < 1 \right\}$ halmaz nyílt;

b.) a $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z \leq \mathrm{e}^{x+y} \right\}$ halmaz zárt;

c.) a $\left\{ (x,x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ halmaz zárt;

d.) a $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x + y < 3,\ -1 < x < 2 \right\}$ halmaz nyílt.

IV. Legyen $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy ekkor $K_1 \times K_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ is kompakt halmaz.

V. Igazoljuk, hogy $\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} = \mathbb{R}^2$.

VI. Tekintsük a

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

függvényt és a $\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \right\}$ halmazt.

a.) Igazoljuk, hogy a Γ halmaz összefüggő.

b.) Igazoljuk, hogy a Γ halmaz nem ívszerűen összefüggő.

c.)* Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ halmaz összefüggő.

d.)* Legyen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{10} \cdot f\left(\dfrac{2x-1}{\pi} \right)$. Tekintsük az

$$A = \left\{ (x - g(x), x + g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1] \right\} \qquad B = [0,1]^2 \setminus A$$

halmazokat. Igazoljuk, hogy $(0,0), (1,1) \in A$, $(0,1), (1,0) \in B$, $A, B \subseteq [0,1]^2$, $A \cap B = \emptyset$, valamint, hogy A és B összefüggő.