

Vizsgatematika

Analízis 1, 2016/17 I. félév

A szóbeli vizsgán mindenki két tételt kap az alábbiakból; az elsőt részletesen kell ismertetni, a másodikból csak az alap definíciókat és a főbb tételeket kell elmondani. Az aláhúzással megjelölt tételek bizonyításának ismerete a minimumkövetelmény része.

1. Metrika, metrikus altér. Metrika. Nyílt, zárt, korlátos halmaz metrikus térben és tulajdonságai. Halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontja. Halmaz lezártja, belseje és tulajdonságai. Metrikus altér fogalma. Nyílt és zárt halmazok jellemzése metrikus altéren. Halmaz lezártja metrikus altéren.

2. Baire-tétel. Ekvivalens metrikák. Konvergens és Cauchy-sorozatok és tulajdonságai. Torlódási pont jellemzése sorozattal. Sehol sem sűrű halmazok. Első és második kategóriájú halmaz. Baire-féle kategóriatétel.

3. Kompakt halmazok. Kompakt halmazok és tulajdonságai. Relatív kompakt és lokálisan kompakt halmazok. Cantor-féle közösrésztétel. Relatív kompakt és lokálisan kompakt halmazok. Lebesgue-lemma.

4. Kompaktság jellemzése. Teljesen korlátos halmazok és tulajdonságai. Kompakt halmaz teljesen korlátos. Bolzano–Weierstrass-tétel. Kompakt halmaz teljessége. Kompakt halmazok szorzata.

5. Szeparábilis terek. Szeparabilitás és jellemzése. Hausdorff-tétel. Speciális metrikák az \mathbb{R}^n téren (d_p, d_∞) és ekvivalenciájuk. Heine–Borel-tétel.

6. Függvények. Függvények határértéke. Átviteli elv határértékekre. Függvény folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. Folytonosság topologikus jellemzése. Folytonos függvények kompozíciója. Homeomorfizmus, izometria, kontrakció.

7. Folytonos függvények kompakt halmazon. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Egyenletesen folytonos függvények. Heine tétele. Egyenletesen folytonos függvények kiterjeszthetősége. Izometriák kiterjeszthetősége.

8. Folytonos függvények kompakt halmazon. Banach-féle fixponttétel. Zárt halmazok szétválasztása. Metrikus tér teljessége tétele. Metrikus terek szorzata. Projekciók folytonossága a metrikus terek szorzatán.

9. Összefüggő halmazok. Ívszerűen összefüggő és összefüggő halmazok, valamint alaptulajdonságaik. Metrikus tér összefüggőségének ekvivalens jellemzése. Metrikus altér összefüggősége. Összefüggő halmaz folytonos függvény általi képe.

10. Normált terek. Norma. Nyílt, zárt és korlátos halmaz normált térben. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontja. Sorozatok és sorok konvergenciája. Cauchy-sorozatok. Banach-terek. Tér teljességének jellemzése abszolút konvergens sorokkal. Normált terek szorzata. Banach-terek szorzata.

11. Normált terek tulajdonságainak jellemzése. Normák ekvivalenciája. Az \mathbb{R}^n téren bármely két norma ekvivalens. Véges dimenziós normált terek tulajdonságai. Kompaktság jellemzése véges dimenziós normált terekben. Normált terek lokális kompaktságának jellemzése. Konvex, zárt és elnyelő halmazok.

- 12. Skalárszorzos terek.** Skaláris szorzás. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Ortogonális, normált, ortonormált és teljes vektorrendszer. Bessel-egyenlőtlenség. Parseval-egyenlőség. Összefüggő nyílt halmazok normált térben.
- 13. Folytonos lineáris leképezések.** Folytonos lineáris leképezés normája. A folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai. Norma szubmultiplikativitása. Folytonos multilineáris leképezés normája. Carl–Neumann-féle sor.
- 14. Approximáció.** Lineáris függvényháló. Szétválasztó függvényhalmaz. Bernstein-polinomok. Bernstein-polinomokkal való egyenletes approximáció. Stone-tétel. Stone–Weierstrass-tétel.
- 15. Hahn–Banach-tétel.** Félnorma fogalma. Szubadditív és pozitív homogén leképezés. Hahn–Banach-tétel. Banach–Steinhaus-tétel. Duális mint szétválasztó függvényhalmaz. Vektortér beágyazása a bidualisba.
- 16. Banach tételei.** Algebra alaptétele. Banach nyílt leképezés tétele. Banach tétele korlátos inverz létezéséről. Zárt gráf tétel. Az l^p terek duálisa. Reflexív terek.
- 17. Differenciálás.** Normált terek között ható leképezések deriválhatósága és deriváltja. Függvények kompozíciójának deriválása. Vektorértékű és skalárértékű függvény szorzatának deriválása.