Analízis 1.

2. Zárthelyi dolgozat

2016. 11. 14. 10.15-11.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Legyen $M_1 =]0,1[$, $d_1(x,y) = |x-y|$, $M_2 = \mathbb{R}^+$ és $f : M_1 \to M_2$, $f(x) = x$. Egyenletesen folytonos-e az f függvény, ha *(5+5 p.)*

a. $d_2(x,y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$?

b. $d_2(x,y) = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|$?

2. Legyen az $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés mátrixa a kanonikus ($e_1 = (1;0)$, $e_2 = (0;1)$) bázisban $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *(6+6 p.)*

a. Határozza meg $\|A\|$ értékét, ha $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

b. Határozza meg $\|A\|$ értékét, ha $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

3. Jelölje $\mathbb{P}$ az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomok halmazát és $p \in \mathbb{P}$ esetén legyen $\|p\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |p(t)|$. *(6+6 p.)*

a. Folytonos-e a $\Psi : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$, $\Psi(p) = p\left(\dfrac{1}{2}\right)$ leképezés? Ha igen, mennyi $\|\Psi\|$?

b. Folytonos-e a $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = p(2)$ leképezés? Ha igen, mennyi $\|\varphi\|$?

4. Legyen V Banach-tér és $A : V \to V$ folytonos lineáris leképezés. Igazolja, hogy a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!} A^{n+2}$ sor konvergens. *(10 p.)*

5. Mutassa meg, hogy minden $a \in l^2_{\mathbb{C}}$, $\|a\| = 1$ vektorra *(5+5 p.)*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}\right| \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$

teljesül. Van-e olyan vektor, melyre a fenti képletben egyenlőség van?