Analízis 1.
1. Zárthelyi dolgozat
2016. 10. 03. 10.15-11.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Tekintsük az $M =]0,1[$ halmazt és a *(2,2,4,4 p.)*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

függvényt.
   a. Igazolja, hogy (M, d) metrikus tér.
   b. Korlátos-e az M halmaz a térben?
   c. Teljesen korlátos-e az M halmaz a térben?
   d. Az $\alpha : \mathbb{N}^+ \to M$, $\alpha(n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sorozat Cauchy-sorozat-e?

2. Legyen (M, d) metrikus tér. Mutassa meg, hogy az M halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden $(U_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre, ha minden $i \in I$ esetén $U_i \subseteq M$ nyílt halmaz, és bármely $i, j \in I$ indexhez létezik olyan $k \in I$ index, melyre $U_i \cup U_j \subseteq U_k$ és $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = M$, akkor van olyan $k \in I$ index, melyre $U_k = M$. *(8 p.)*

3. Mutassa meg, hogy ha M nem üres, teljes metrikus tér, melynek nincs izolált pontja, akkor az M halmaz nem megszámlálhatóan végtelen. *(8 p.)*

4. Legyen (M, d) metrikus tér. *(8,8 p.)*
   a. Igazolja, hogy minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $x \in M \setminus K$ pont esetén létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $x \in U$, $K \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$ teljesül.
   b. Igazolja, hogy minden $K_1, K_2 \subseteq M$ kompakt halmazhoz $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ esetén létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $K_1 \subseteq U$, $K_2 \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$ teljesül.

5. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér. Milyen $t \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz az $M = M_1 \times M_2$ halmazon *(8 p.)*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + (1 + t^2) d_2(y_1, y_2)^2}$$

metrika?