# Analízis 1.

## 1. Pótzárthelyi dolgozat

*2016. 12. 08. 14.15-15.45*

Név:

Neptun kód:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | $\sum$: |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

1. Tekintsük az $M = \mathbb{R}$ halmazt és a *(2,4,4 p.)*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto |2^x - 2^y|$$

függvényt.
 a.) Igazolja, hogy $(M, d)$ metrikus tér.
 b.) Korlátos-e a $]-\infty, 0[$ illetve a $]0, \infty[$ halmaz a térben?
 c.) Mutassa meg, hogy az $(M, d)$ metrikus tér nem teljes.

2. Legyen $M = \mathbb{R}^2$ és $d$ az euklideszi metrika, valamint *(6,4 p.)*

$$A = \left\{(x, y) \in M |\ x > 0,\ 0 < y < x^2\right\} \cup \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) |\ n \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

Tekintsük az $(A, d|_{A\times A})$ metrikus teret.
 a.) Határozza meg az $A$ halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontjai.
 a.) Adja meg az $\operatorname{Int} A$, $\overline{A}$ és a $\operatorname{Fr} A$ halmazt.

3. Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$ és legyen $d' = d|_{A\times A}$. *(5,5 p.)*
 a.) Mutassa meg, hogy ha az $(A, d')$ térben $A$ kompakt halmaz, akkor $A$ kompakt az $(M, d)$ térben is.
 b.) Mutassa meg, hogy ha $A$ kompakt az $(M, d)$ térben, akkor $A$ kompakt halmaz az $(A, d')$ térben is.

4. Legyen $M = C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ és minden $f, g \in M$ esetén $d(f, g) = \sup\limits_{t\in[0,2\pi]} |f(t) - g(t)|$. Mutassa meg, hogy az $(M, d)$ metrikus térben az *(5,5 p.)*
 a.) $U = \{f \in M |\ \forall t \in [0, 2\pi] :\ f(t) > 0\}$ halmaz nyílt;
 b.) $F = \{x \mapsto \sin(x - a) |\ a \in \mathbb{R}\}$ halmaz kompakt.

5. Legyen $(M_1, d_1)$ lokálisan kompakt metrikus tér, $(M_2, d_2)$ metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : M_1 \to M_2$ folytonos függvény, valamint $f : M_1 \to M_2$. Igazolja, hogy az alábbi két kijelentés ekvivalens. *(10 p.)*
 i. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál az $f$ függvényhez. Azaz minden $x \in M_1$ pontnak létezik olyan nyílt $U \subseteq M_1$ környezete, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál az $f$ függvényhez az $U$ halmazon.
 ii. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat minden kompakt halmazon egyenletesen konvergál az $f$ függvényhez.