Pólya–Szegő szeminárium 4.
7. feladatsor
2005. november 7.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 5$ egész, akkor $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ összetett szám.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészhez létezik olyan x pozitív egész szám, hogy az

$$x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$$

sorozat minden tagja osztható n-nel.

3. Legyen egy $\pi \in S_n$ permutáció $\mathrm{inv}(\pi)$ inverziós száma az olyan $i < j$ párok száma, melyekre $\pi(i) > \pi(j)$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{inv}(\pi) = \mathrm{inv}(\pi^{-1})$.

4. Legfeljebb hány (a) páros, illetve (b) páratlan elemszámú részhalmazt lehet kiválasztani egy $2n$ elemű halmazból úgy, hogy bármely kettőnek a metszete páros elemszámú legyen?

5. Jelölje a Catalan-számokat

$$C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

Lássuk be, hogy

$$1 = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \ldots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & \ldots & C_n \\ \vdots & & & \\ C_{n-1} & C_n & \ldots & C_{2n-2} \end{vmatrix}$$