SZAKDOLGOZATI, Ph.D., TDK - TÉMÁK

Interpoláció súlyozott terekben

Az interpoláció nagyjából annyit jelent, hogy néhány pontbeli értékéből hogyan lehet rekonstuálni egy függvényt. Gyakorlatilag úgy is fogalmazhatunk, hogy egy jelenséget időnként/helyenként meg tudunk mérni, akkor le tudunk-e vonni valamilyen következtetést az egész esemény lefolyására nézve? Ehhez tudni kell persze, hogy milyennek várjuk a folyamatot, azaz, most már pontosabban: milyen függvénytérben levő függvényt akarunk interpolálni, milyen interpolációs alapfüggvények segítségével, és milyen norma szerinti konvergencia segítségével szeretnénk előállítani a függvényünket.

Például f folytonos függvény a számegyenesen, $X = \{x_{k,n}|\ k = 1,\ldots,n; n = 1,2,\ldots,\} \subset \mathbf{R}$ pontrendszer, keresünk olyan (algebrai) polinomokat: $p_n(x)$, melyekre

$$f(x_{k,n}) = p_n(x_{k,n}) \qquad k = 1,\ldots,n; n = 1,2,\ldots,$$

és szeretnénk, ha az így nyert polinomsorozat valahogy konvergálna is a függvényhez. A folytonos függvények terében az egyenletes konvergencia lenne a természetes követelmény, de ez a ”végtelenben” nyilvánvalóan lehetetlen. Ezért szoktunk bevezetni a végtelenben “gyorsan” nullához tartó súlyfüggvényeket (w) melyek szerinti súlyozott terekben már értelmes a feladat. Legyen tehát w pozitív, folytonos,

$$\lim_{|x|\longrightarrow\infty} w(x)x^n = 0 \qquad n = 1,2,\ldots,$$

$$C_w = \{f \in C(\mathbf{R})|\lim_{|x|\longrightarrow\infty} f(x)w(x) = 0\}$$

$$\|f\|_w = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)w(x)|$$

Ekkor már a fenti polinomokról megkérdezhetjük, hogy milyen feltételek mellett lesz

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f - p_n\|_w = 0.$$

Szakdologozatra a különböző interpolációs eljárások és a rájuk vonatkozó konvergencia-, illetve divergencia tételek ismertetését ajánlom, önálló munkára pedig: a Lagrange interpolációt lehet kidolgozni súlyozott normális pontrendszerre. Ez utóbbi a Fejér-féle gondolat általánosťása lenne a legújabb eredmények felhasználásával.

Dirichlet-feladat

Itt körülbelül arról van szó, hogy adott egy parciális differenciálegyenlet (pl.$\Delta u = 0$), egy tartomány, és a tartomány határán egy függvény. Olyan függvényt keresünk, ami a tartományon belül kielégíti a differenciálegyenletet, a határ felé tartva (valamilyen módon) pedig tart az előre megadott függvényhez (valamilyen normában). Ha sikerült tisztázni, hogy milyen feltételek mellett oldható meg a feladat, illik a megoldás alakját is megadni (Poisson integrál).

A Dirichlet-feladatnak könyvtárnyi irodalma van. A klasszikus és modern megközelítések tárháza kiapadhatatlan. A probléma összekapcsolja a parciális differenciálegyenleteket, valószínűségszámítást, komplex függvénytant, potenciálelméletet stb. Ezért

szakdolgozatra néhány módszer ismertetését javaslom, önálló munkára pedig a következőt: Klasszikus síkbeli eset, kör vagy félsík, a peremen végtelen sok zérushellyel rendelkező súlyfüggvény.