

Fourier analízis és függvénysorok: emlékeztető

Ortogonalis függvényrendszerek általános tulajdonságai: definíció, példák. Függetlenség, ortogonalizáció Gram determinánssal. Teljes és zárt rendszerek. Ekvivalencia tétel Hilbert térben. Példák. Rademacher-, Haar-, és Walsh-rendszer. Tulajdonságaik. Eszköztár a további vizsgálatokhoz: Fourier transzformált. L_1 -en, Schwartzon, tulajdonságok, inverziós formula, kiterjesztés L_2 -re.

Bevezetés a waveletekbe: Haar-wavelet. Definíció multirezolúción keresztül. Ortogonalitásra, Riesz-feltételre vonatkozó ekvivalencia tételek Fourier transzformációval. Approximációs eljárás multirezolúcióval: Apa- és anya-wavelet, apa által generált magfüggvény, magfüggvényre vonatkozó feltételből konvergencia-tétel. Multirezolúció jellemzése Fourier transzformálttal, apából anya. Magfüggvényre vonatkozó (másik) feltételből apa tulajdonságai. Következmény: anya integrálja. Másik definíció anya integrálján keresztül. További példák. Gábor transzformáció. Megengedett wavelet, tulajdonságai, wavelet-transzformáció. Wavelet-transzformált Fourier transzformáltja, Parseval formula, inverziós formula.

Bevezetés a Walsh sorokba: Walsh-rendszer Paley-féle felírása, diadikus csoport: művelet, topológia, Haar-mérték. Karakterek, jellemzésük, művelet, izomorfia, ortogonalitás. $C(G)$ és C_w terek, a közöttük levő kanonikus izomorfizmus, karakterek, Walsh-függvények. Diadikus eltolás és topológia. Diadikus eltolás kapcsolata a Walsh-függvényekkel és a Lebesgue mértékkel. A kanonikus izomorfizmus izometria.

Walsh-Fourier sorok. Riemann-Lebesgue lemma, konvolúció a csoporton, kapcsolata a Fourier transzformálttal. Eltolás és karakter. Dirichlet-mag és tulajdonságai. Következmény: majdnem mindenütt konvergencia, lokalizációs elv, Dini-kritérium, Dirichlet-kritérium. Fejér-mag, tulajdonságai, konvergencia-tétel.

A klasszikus approximációelmélet eszközei

Terek: Normált-, és kvázinormált terek, példák: súlyozott L_p -, Sobolev- és Lorentz-terek. Függvény monoton fogyó átrendezése, Hardy egyenlőtlenség, $L_{p,r}$ -norma. Simasági modulus, Lipcschitz-, és Besov-terek. Folytonos függvények terei. Tipikusan folytonos függvények tulajdonságai: fűrészfog függvények, monotonitás féloldali felső-, alsó deriválhatóság.

Líneáris operátorok: Riesz-Thorin tétel (Phragmén-Lindelöf bizonyítása nem kell), és alkalmazásai: Hausdorff-Young, Young. Pozitív operátorok, példák, Korovkin tétel. Projekciók, példák, Lozinszkij-Harsiladze.

Sűrűségi tételek: Stone-Weierstrass tétel, Müntz tétel (bizonyítás csak L_2 , C -ben). (Mikulási Ahiezer-Babenko+Paley-Wiener-t nem kérem számon.)

Egyenletes közelítés: Jackson operátor, trigonometrikus függvényekre vonatkozó Jackson tétel. Egyenletesen legjobb közelítés. Fordított tételek. Szegő, Bernstein, Markov. Simasági

modulus becslése a legjobb közelítéssel. Lipschitz osztály és legjobb közelítés. Példa az élességre. Legjobb közelítés és Szobolev terek.

Legjobb közelítés jellemzése: Csebisev tételei: jellemzés extrémális pontokkal, egyértelműség. Csebisev-rendszer Hausdorff térben. Ekvivalens definíciók. Kolmogorov és Haar tételei (Tietze tétel bizonyítása nem kell). Példák Csebisev-rendszerekre.

Bevezető gondolatok a spline-approximációhoz: Nem kérem számon.

Irodalom

1. J. Berg, J. Löfström: Interpolation Spaces
2. P. Borwein, T. Erdélyi: Polynomials and Polynomial Inequalities
3. Ch. K. Chui: An Introduction to Wavelets
4. R. A. DeVore, G. G. Lorentz: Constructive Approximation
5. K. Hoffman: Banach Spaces of Analytic Functions
6. S. Jaffard, Y. Meyer, R. Ryan: Wavelets
7. S. Karlin, W. Studden: Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics
8. P. P. Korovkin: Linear Operators and Approximation Theory
9. H. N. Mhaskar: Introduction to the Theory of Weighted Polynomial Approximation
10. H. N. Mhaskar, D. V. Pai: Fundamentals of Approximation Theory
11. I. P. Natanson: Konstruktív függvénytan
12. R. C. Paley, N. Wiener: Fourier Transforms in the Complex Domain
13. M. D. Powell: Approximation Theory and Methods
14. Schipp Ferenc: Waveletek (egyetemi jegyzet ELTE)
15. F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon: Walsh Series
16. E. C. Titchmarsh: The Theory of Functions