Gyakorló feladatok

az első A1 ZH-ra (2008. október 17.)

Szántó Ádám

1. Komplex számok

A. Számítsuk ki: $(2+j)^7+(2-j)^7$.

B. Számítsuk ki tetszőleges n-re: $\frac{(1+j)^n}{(1-j)^{n-2}}$.

C. Vonjunk gyököt: $\sqrt[6]{-27}$.

D. Oldjuk meg az egyenletet: $z^2=\overline{z}^2$.

E. Próbáljuk megoldani, tetszőleges $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{C}$ esetén: $\left(\frac{1+xj}{1-xj}\right)^n=c$. Ehhez először igazoljuk, hogy a megoldhatóság szükséges feltétele: $|c|=1$. Vizsgáljuk meg, hogy ekkor van-e megoldás, hány megoldás van és mik ezek.

Általános tipp az egyenletek megoldásához: mindig keressük a komplex számot vagy az algebrai, vagy az exponenciális alakjában.

2. Halmazok

A. Hozzuk egyszerűbb alakra: $A\cup(A\cap B)$.

B. Hozzuk egyszerűbb alakra: $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})$.

Igazoljuk a következő azonosságokat:

C. $A\cup B\subseteq C \Leftrightarrow (A\subseteq C)$ és $(B\subseteq C)$.

D. $(A\setminus B)\cup B=A \Leftrightarrow B\subseteq A$.

E. $A\cap B\subseteq C \Leftrightarrow A\subseteq(\overline{B}\cup C)$.

F. Tegyük fel, hogy $A\supset B\supset C$. Ekkor mivel egyenlő: $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\setminus(A\cap B\cap C)$?

3. Vektorok

Koordinátamentes feladatok

A. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy háromszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő az oldalfelező pontokba vezető vektorok összegével!

B. Mikor igaz, hogy $c\,\underline{a} + d\,\underline{b} \perp d\,\underline{a} - c\,\underline{b}$, minden $c, d \in \mathbb{R}$-re?

C. Mikor igaz, hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = 0$?

D. Mikor igaz, hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = 0$?

Koordinátás feladatok

A. Adott két egyenes: $\begin{pmatrix} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \\ z = -4t \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} x = u + 3 \\ y = -3u + 5 \\ z = u - 8 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a $3x + 7y + cz = 1$ sík egyenletében a c paramétert úgy, hogy az egyenesek által meghatározott sík merőleges legyen erre a síkra.

B. Igazoljuk, hogy az $e_1 : \begin{pmatrix} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{pmatrix}$ és $e_2 : \begin{pmatrix} x = 5 + 2u \\ y = -1 + 2u \\ z = 1 + u \end{pmatrix}$ egyenesek merőlegesek egymásra és írjuk fel az e_1-re illeszkedő, e_2-re merőleges sík egyenletét.

C. Igaz-e, hogy a $P_1(2, 0, 0)$, $P_2(3, -5, -5)$, $P_3(4, 4, 3)$, $P_4(7, 3, 1)$ pontok egy síkban vannak?

D. Mi a távolsága a **C.** feladatbeli P_1 pontnak a **B.** feladatbeli e_1 egyenestől?

E. Mi a távolsága a **C.** feladatbeli P_2 pontnak az **A.** feladatbeli síktól?

F. Tekintsük azt a két háromszöget, ami alapján a nevezetes szögek szögfüggvényeit számoltuk, még középiskolában. Vegyük fel ezeket vektorosan, számoljuk ki néhány vektor skaláris és vektoriális szorzatát.

4. Sorozatok

Fogalmazzuk meg az alábbi definíciókat, esetleg formalizáljuk, de a definícióban ne szerepeljen az a szó, hogy "nem", illetve a formális leírásban a ¬ jel.

A. Nem korlátos sorozat

B. Nem $+\infty$-hez divergáló sorozat.

Milyen (a_n) sorozatok elégítik ki az alábbi definíciókat?

C. Van olyan K szám, hogy minden N természetes szám esetén van olyan $n > N$ index, hogy $a_n < K$.

D. Van olyan K szám, hogy minden N természetes szám esetén minden $n > N$ indexre fennáll, hogy $a_n < K$.

Van-e határértéke? Mi?

A. $a_n = 2 + 4\,n$

B. $a_n = \frac{-4\,n^2+5}{5\,n^3-2\,n}$