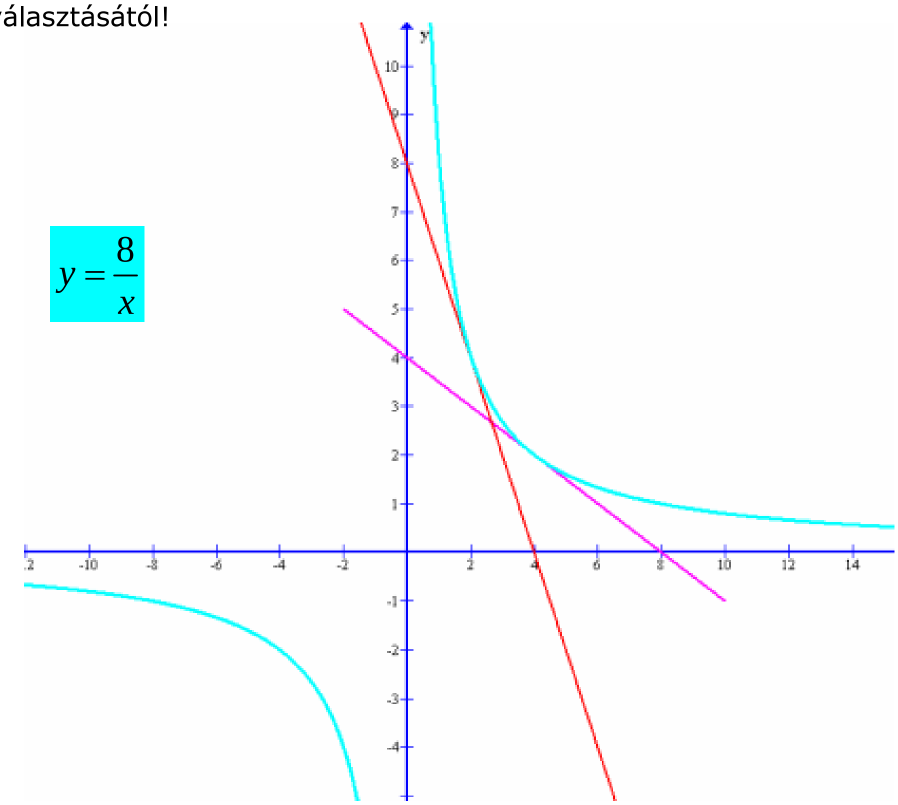
Építész Kar, **Minta ZH** az 1.ZH.-hoz

1. Igazolja, hogy az $y=\dfrac{8}{x}$ hiperbolához egy tetszőleges pontban húzott érintő és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területe nem függ az érintési pont megválasztásától!



Megoldás:

Először fel kell írni a hiperbola érintőjének egyenletét egy tetszőleges x_0 pontban.

Az érintő egyenlete:

e: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, ahol $y_0=f(x_0)$, behelyettesítve

$y-\dfrac{8}{x_0}=-\dfrac{8}{{x_0}^2}(x-x_0)$, a háromszög területét megkapjuk, ha először az érintő és tengelyek metszéspontját meghatározzuk, így megkapjuk a két befogót, majd a két befogót összeszorozzuk és osztjuk 2-vel.

e és az x-tengely metszéspontja adódik,ha az egyenletébe $y=0$-t helyettesítünk.

$-\dfrac{8}{x_0}=-\dfrac{8}{{x_0}^2}(x-x_0)$, $1=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$, innen $x_0=(x-x_0)$, $\quad x=2x_0$

e és az y-tengely metszéspontja adódik,ha az egyenletébe $x=0$-t helyettesítünk.

$y-\dfrac{8}{x_0}=-\dfrac{8}{{x_0}^2}(-x_0)$, $y=\dfrac{16}{x_0}$, $\quad T=\left(2x_0\cdot\dfrac{16}{x_0}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=16$

2. Határozza meg a következő függvények deriváltját.

a) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{4x^5+5^x+tg5x}$

$$f\left(x\right)=\left(4x^5+5^x+tg5x\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{3}\left(4x^5+5^x+tg5x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(20x^4+5^x\cdot\ln 5+\frac{5}{\cos^2 5x}\right)$$

b.) $h\left(x\right)=\sqrt{2x+\sqrt[3]{3x+\sqrt[4]{4x+5}}}$, $h\left(x\right)=\left(2x+\left(3x+\left(4x+5\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$h'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(2x+\left(3x+\left(4x+5\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(2x+\left(3x+\left(4x+5\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$h'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(2x+\left(3x+\left(4x+5\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(2+\frac{1}{3}\left(3x+\left(4x+5\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3+\left(\frac{1}{4}\left(4x+5\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot 4\right)\right)\right)$$

c) $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^3+5x^2+6x\right)\ln x}{\cos 2x+10}$,

$$g'\left(x\right)=\frac{\left(\left(3x^2+10x+6\right)\ln x+\left(x^3+5x^2+6x\right)\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\cos 2x+10\right)-\left(\left(x^3+5x^2+6x\right)\ln x\right)\cdot\sin 2x\cdot 2}{\left(\cos 2x+10\right)^2}$$

3. Vizsgálja meg az $y=5-\dfrac{10x}{x^2+1}$ függvényt a következő szempontok szerint.

a) Mely intervallumokon növekedő illetve csökkenő?
b) Mely intervallumokon konvex illetve konkáv?
c) Van-e lokális szélsőértéke, és ha igen hol?

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{10x}{x^2+1}\right)=5$$

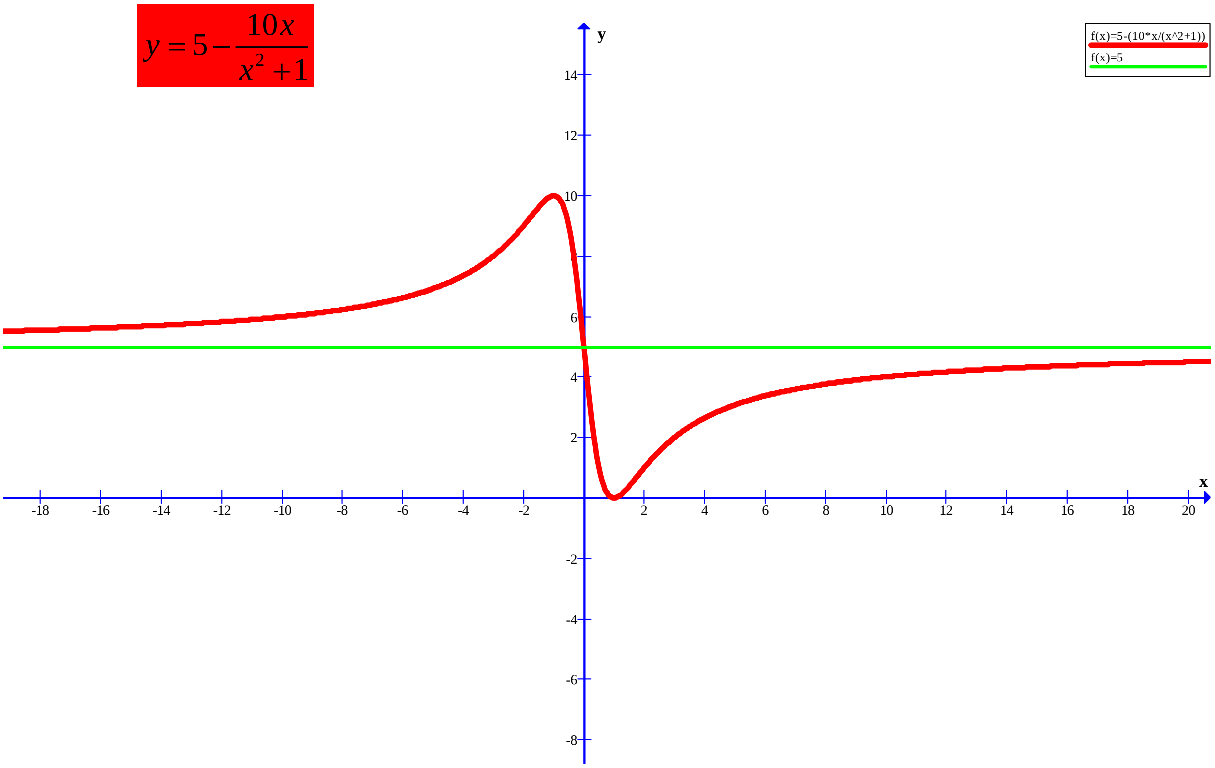
$$f'\left(x\right)=-\left(\frac{10\cdot\left(x^2+1\right)-10x\left(2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\right)=-\frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}=10\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \qquad 1-x^2=0, \qquad x=\pm 1$$

$f''(x)=10\left(\dfrac{-2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)(2x)\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}\right)=\dfrac{20x\left(x^2+1\right)\left(-x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=0$, ha $x=0$, vagy $x=\pm\sqrt{3}$,

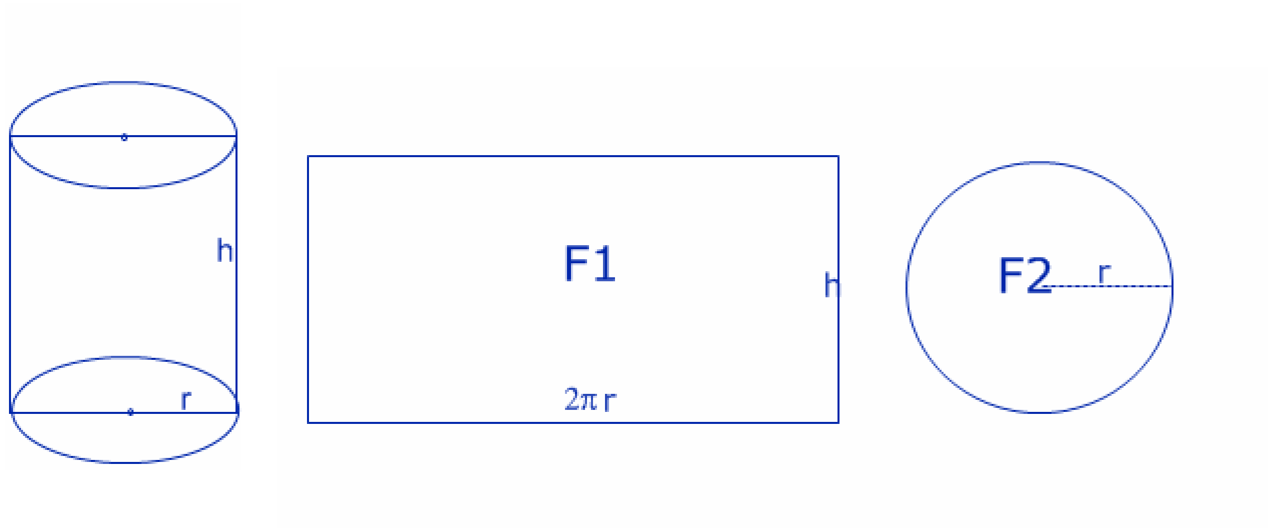
sorba rendezve: $-\sqrt{3}$, -1, 0, 1, $\sqrt{3}$,

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3},-1\right)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$\left(1,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$(1,\infty)$
$f(x)$	∪↗	inflexió	∩↗	max	∩↘	inflexió	∪↘	min	∪↘	inflexió	∩↗
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-

$y=5-\dfrac{10x}{x^2+1}$



4. Egy felül nyitott, henger alakú, $^1/_2$ l térfogatú edényt akarunk alumínium lemezből készíteni. Hogyan válasszuk meg az edény sugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk fel, és mennyi lesz ez a felhasznált lemezmennyiség?



A felület függvény F=F1+F2 minimumát keressük az alábbi feltételek mellett:

$V = r^2\pi \cdot h = \frac{1}{2}$, innen $r^2\pi \cdot h = \frac{1}{2}$ azaz $h = \frac{1}{2r^2\pi}$

$F = 2\pi r \cdot h + r^2\pi = 2\pi r \cdot \frac{1}{2r^2\pi} + r^2\pi = \frac{1}{r} + r^2\pi$, ott lehet minimuma ahol $F' = 0$

$F' = \left(\frac{1}{r} + r^2\pi\right)' = -\frac{1}{r^2} + 2r\pi = 0$ $\quad \frac{1}{r^2} = 2r\pi$, $\frac{1}{r^3} = 2\pi$, $r^3 = \frac{1}{2\pi}$, $\quad r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Tehát a sugár $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

5.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{16+x}-4} \cdot \frac{\sqrt{16+x}+4}{\sqrt{16+x}+4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{16+x}-4} \cdot \frac{\sqrt{16+x}+4}{\sqrt{16+x}+4}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x\sqrt{16+x}+4}{16+x-16} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \sqrt{16+x}+4 = 8$$