

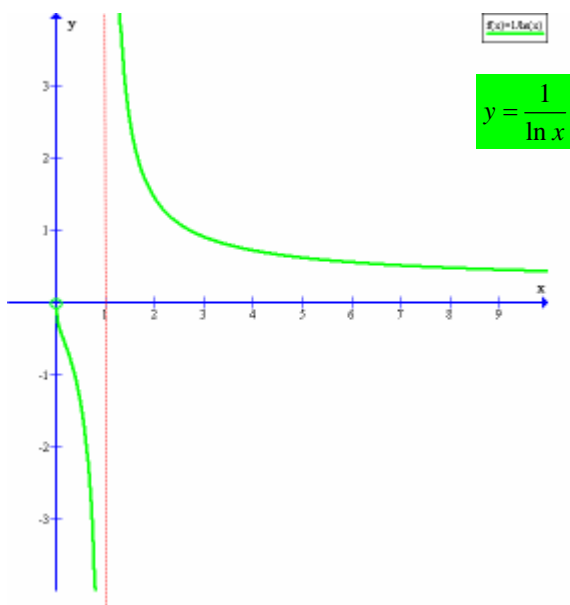
Építész Matematika Vizsgafeladatok

1. Mi az értelmezési tartománya az $y = \frac{1}{\ln x}$ függvénynek?

- A) $x \geq 0$ B) $x > 0$ C) $x > 1$ D) $x > 0$ és $x \neq 1$
E) Minden valós szám F) Az előzőek közül egyik sem.

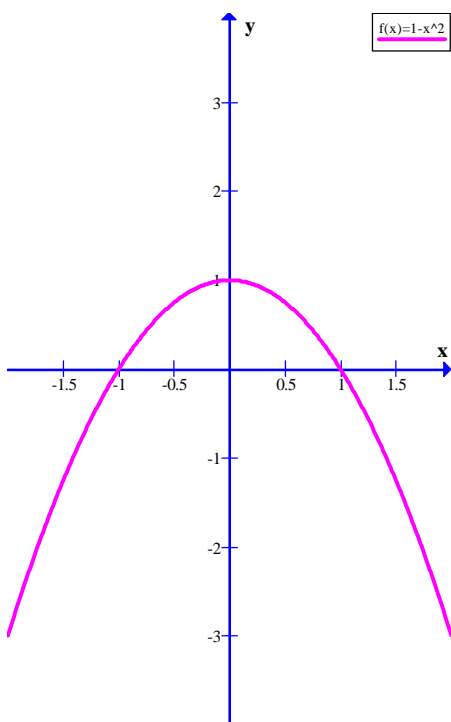
Mo.

A helyes válasz D.),



2. Az $y = 1 - x^2$ függvény a $[-1, 1]$ intervallum fölött invertálható, mert

- A) monoton növekvő B) monoton csökkenő C) folytonos D) differenciálható
E) az intervallum véges F) nem invertálható.



A helyes válasz F.)

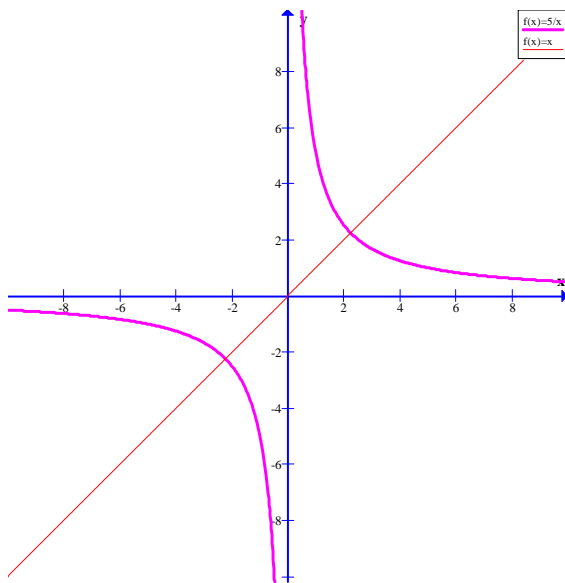
Mert a függvény nem kölcsönösen egyértelmű, különböző x -ekhez ugyanakkora függvényérték tartozik, pl.

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3. Az $y = \frac{5}{x}$ függvény inverze az

- A) $y = \frac{5}{x}$ függvény B) $y = \frac{1}{5x}$ függvény C) $y = 5x$ függvény D) $y = \frac{x}{5}$ függvény
 E) $y = 5 - x^2$ függvény F) nincs inverze

A helyes válasz: D.)



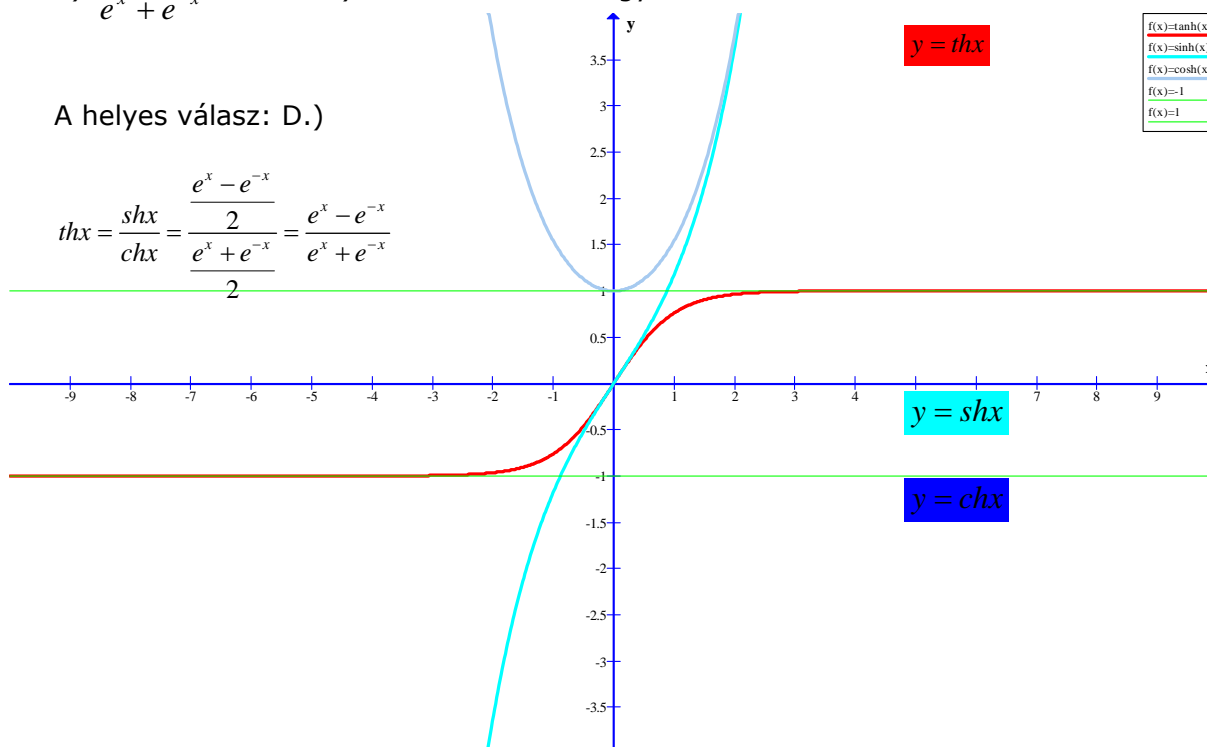
A függvény invertálható, mert szigorúan monoton csökkenő az értelmezési tartományán (bár nem folytonos). A függvény inverzét úgy kapjuk, hogy kifejezzük a függvénykapcsolatból x -et és felcseréljük a szerepét y -al. Az inverz függvény grafikonja az eredeti tükörképe az $y=x$ egyenesre, ami ebben az esetben saját maga.

4. A $\text{th}x$ (tangens hiperbolikus) függvény definiálható az alábbi kifejezéssel:

- A) $\frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x}$ B) $\frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x}$ C) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ D) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
 E) $\frac{e^x + e^x}{e^x + e^{-x}}$ F) az előzőek közül egyikkel sem.

A helyes válasz: D.)

$$\text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



5. Az $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$ függvény határértéke $x \rightarrow -1$ esetén

- A) $-\infty$ B) -3 C) -1 D) 0 E) 2 F) nem létezik.

A helyes válasz B.) mert $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x-1) = -3$

6. Melyik állítás igaz?

Egy függvény folytonos az (a, b) intervallumon, ha

- A) annak minden pontjában van határértéke. B) annak minden pontjában differenciálható. C) szigorúan növekvő. D) integrálható. E) az előzőek közül több is igaz. F) az előzőek közül egy sem igaz

A helyes válasz B.) mert ha egy függvény egy pontban differenciálható akkor ott folytonos.

Az A.) nem igaz, mert az nem elég, hogy minden pontjában van határértéke, mert még az is szükséges, hogy minden pontban legyen helyettesítési értéke is és az megegyezzen a határértékével.

Ellenpélda: $(a, b) = (-2, 2)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

C.) nem igaz, mert van szigorúan monoton növekvő nem folytonos függvény, pl:

$$(a, b) = (-1, 1), f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x < 0 \\ 1+x & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

D.) nem igaz, mert van integrálható nem folytonos függvény, pl:

$$(a, b) = (-1, 1), f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

7. Az $f(x) = \begin{cases} ax & \text{ha } x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$ függvény differenciálható az $x = 0$ helyen, ha

- A) $a = 0$ B) $a = 1$ C) $a = 2$ D) $a = 3$ E) a -tól függetlenül F) soha.

A helyes válasz a C.), mert

Ha $a=2$, akkor differenciálható a függvény az $x=0$ pontban, mert $(ax)' = a$ és $(x^2 + 2x)' = 2x + 2$, és ahhoz, hogy a 0 -pontban differenciálható legyen balról és jobbról ugyanaz az érték kell, mivel $2x+2$ az $x=0$ ban 2 , ezért ha $a=2$ akkor diff.ható a függvény a 0 -ban.

$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$ differenciálható $x=0$ ban.

8. Az $y = \frac{e^{2x}}{\cos 3x}$ függvény deriváltja

A) $y' = \frac{e^{2x} \cos 3x - e^{2x} \sin 3x}{\cos^2 3x}$

B) $y' = \frac{2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x}{\cos^2 3x}$

C) $y' = \frac{2e^{2x} \cos 3x + 3e^{2x} \sin 3x}{\cos^2 3x}$

D) $y' = \frac{e^{2x} \cos 3x + e^{2x} \sin 3x}{\cos^2 3x}$

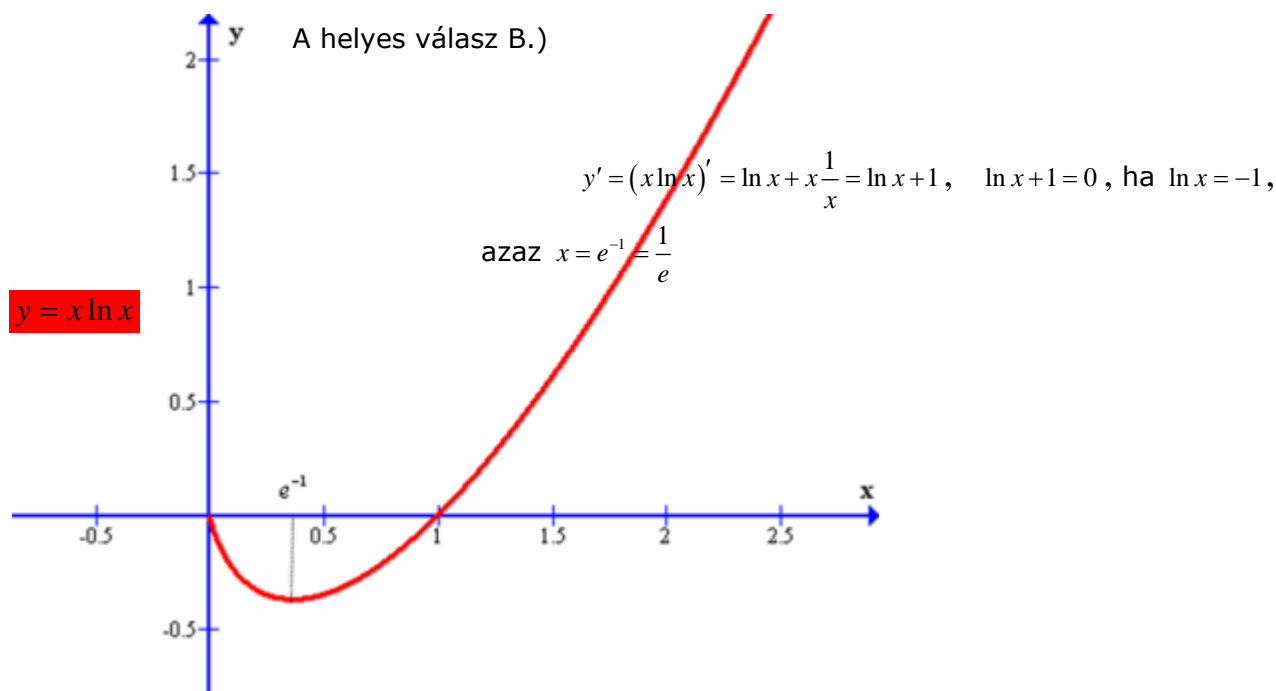
E) $y' = \frac{2e^{2x} \cos 3x - 6e^{2x} \sin 3x}{\cos^2 3x}$

F) egyik sem

A helyes válasz a C.) mert $y' = \left(\frac{e^{2x}}{\cos 3x}\right)' = \frac{2e^{2x} \cos 3x - e^{2x}(-\sin 3x \cdot 3)}{(\cos 3x)^2} = \frac{2e^{2x} \cos 3x + 3e^{2x} \sin 3x}{\cos^2 3x}$

9. Az $y = x \ln x$ függvény növény, ha

- A) $x > 0$ B) $x > e^{-1}$ C) $x > 1$ D) $x > e$ E) mindenütt F) sehol.



10. Az $y = \arcsin x$ függvény konvex, ha

- A) $-1 \leq x \leq 1$ B) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ C) $0 \leq x \leq 1$ D) $-1 \leq x \leq 0$ E) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$

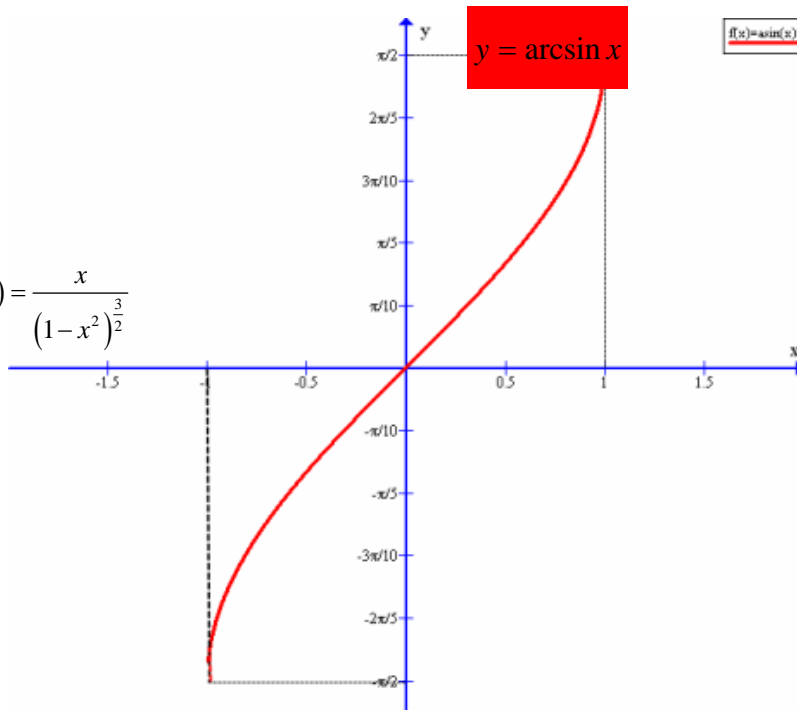
- F) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

A helyes válasz F.) mert:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y'' = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \text{ha } 0 \leq x \leq 1$$



11. Az $y = \sin x$ függvénynek inflexiós pontja van, ha

- A) $x = k\frac{\pi}{2}$ B) $x = k\pi$ C) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ D) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ E) nincs inflexiós pontja
 F) az előzőek közül egyik válasz sem igaz.

A helyes válasz B.) mert $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$ és $y'' = 0$ $x = k\pi$ helyeken és itt előjelet vált.

12. Az $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ függvénynek lokális minimuma van, ha

- A) $x = -2$ B) $x = 0$ C) $x = 1$ D) $x = 2$ E) nincs lokális minimuma F) egyik válasz sem jó

A helyes válasz a D.) mert $y' = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, $y' = 0$ egyenletből adódik, hogy $\frac{1}{2} = \frac{2}{x^2}$, $x^2 = 4$, azaz $x = \pm 2$, itt lehet szélső értéke. Mivel $y'' = 4x^{-3}$, és $y''(-2) = \frac{4}{(-2)^3} = -\frac{1}{2}$ itt maximuma van,

$$y''(2) = \frac{4}{(2)^3} = \frac{1}{2} \text{ itt minimuma van.}$$

13. Az $f(x) = 4x \cos 2x$ függvénynek primitív függvénye az alábbi függvény:

- A) $2x \sin 2x + \cos 2x$ B) $4 \cos 2x - 8x \sin 2x$ C) $2x^2 \sin 2x$ D) $-4 \sin 2x$
 E) $2 \sin 2x$ F) egyik sem.

A helyes válasz A.) mert:

$$4 \int x \cos 2x dx = 2 \int x [\cos 2x(2)] dx = 2 \left[(x \sin 2x) - \int \sin 2x dx \right] = 2 \left[(x \sin 2x) - \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx \right] = 2 \left[(x \sin 2x) + \frac{1}{2} \cos 2x \right] =$$

$$= 2 \left[(x \sin 2x) + \frac{1}{2} \cos 2x \right] = 2x \sin 2x + \cos 2x; \text{ parciális integrálással } \begin{matrix} 2 \cos 2x = f'(x) \\ x = g(x) \end{matrix} \text{ szereposztással}$$

14. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

- A) $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + c$ B) $\frac{1}{2} \arcsin^2 x + c$ C) $\arccos x \sqrt{1-x^2} + c$ D) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} + c$
 E) $-\frac{1}{2} \arccos^2 x + c$ F) egyik sem.

A helyes válasz B.) mert: $\int (f(x))^\alpha f'(x) dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ képlettel

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int (\arcsin x)^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + C$$

15. Az $\underline{a}(3,2,1)$ és $\underline{b}(1,2,-7)$ vektorok szöge

- A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 180° F) egyik sem.

A helyes válasz D.) mivel $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ ezért a közrezárt szög 90° , $\cos(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$

16. Az $\underline{a}(3, 4, 5)$ és $\underline{b}(6, 7, 8)$ vektorok skaláris szorzata
 A) $(-3, 6, -3)$ B) $(-3, -6, -3)$ C) $(18, 28, 40)$ D) 86 E) 0
 F) egyik sem.

A helyes válasz D.) mert $(3, 4, 5)(6, 7, 8) = (18+28+40)=86$

17. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixok szorzata:

- A) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 6 & 17 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 17 & 10 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -6 & -17 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$
 F) egyik sem.

A helyes válasz: C.), mert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 17 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$$

18. Az $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 13 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \\ 23 \\ 28 \end{bmatrix}$ egyenletrendszernek

- A) nincs megoldása, mert több az egyenlet, mint az ismeretlen.
 B) pontosan egy megoldása van, mégpedig az $x_1=x_2=x_3=1$.
 C) végtelen sok megoldása van.
 D) nem oldható meg, mert az együttható mátrix determinánsa zérus.
 E) a fentiek közül több állítás is igaz.
 F) a fentiek közül egyik állítás sem igaz.

A helyes válasz C.) mert az un. kibővített mátrix (együttható mátrixhoz, utolsó oszlopként, a jobb oldalon álló vektort írva)

1	5	7	13
2	6	10	18
3	7	13	23
4	8	16	28

Majd a következő un. elemi sorműveleteket (sor konstansszorosa másik sorhoz adva)
 Az elvégzett műveletek nem változtatják meg a megoldások halmazát, hiszen egyenlet konstanssorosát hozzáadva másik egyenlethez nem változtat a megoldásokon.

1. Első sor kétszeresét kivonva a második sorból, első sor háromszorosát kivonva a harmadik sorból, első sor négyszeresét kivonva a negyedik sorból kapjuk:

1	5	7	13
0	-4	-4	-8
0	-8	-8	-16
0	-12	-12	-24

2. A második sort a második elemmel (-4) elosztva kapjuk:

-4

1	5	7	13
0	1	1	2
0	-8	-8	-16
0	-12	-12	-24

3. A második sor 8-szorosát a harmadik sorhoz és 16 szorosát a negyedik sorhoz adva,

$$\begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 5 & 7 & 13 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

A kapott egyenletrendszer ekvivalens az eredetivel, azaz ugyanazok a megoldásai.

$$x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 13$$

$$x_2 + x_3 = 2'$$

ennek megoldása: $x_1 = 13 - 5(2 - x_3) - 7x_3 = 13 - 10 + 5x_3 - 7x_3 = 3 - 2x_3$

$$x_2 = 2 - x_3$$

$x_1 = 3 - 2x_3$, ahol x_3 tetszőlegesen megválasztható paraméter, azaz végtelen sok megoldás van,
 $x_2 = 2 - x_3$

mely a következő:

$$x_1 = 3 - 2p$$

$$x_2 = 2 - p$$

$$x_3 = p$$

19. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix inverze

A) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{-4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$

F) nincs inverze.

A helyes válasz E.) mert

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{-4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és ez az inverz definíciója.

20. A $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ determináns értéke

A) -2

B) 0

C) 2

D) 4

E) 6

F) egyik sem

A helyes válasz B.) mert:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -14 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

FOLYTATÁS KÖVETKEZIK!

Idáig minden feladat 2 pont, innen kezdve mindegyik 4 pont. Összesen max $20 \times 2 + 5 \times 4 = 60$ pont.

21. Bontsa fel az $\underline{a}(3,3,3)$ vektort a $\underline{b}(1,2,1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensekre!

A párhuzamos komponens koordinátái $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

A merőleges komponens koordinátái $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Mo.:

A képletek: $\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$, $\underline{b}_1 \perp \underline{b}_2$, $\underline{b}_1 \parallel \underline{a}$, $\underline{b}_1 = \left(\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|^2}\right) \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$, $\underline{b}_2 = \underline{b} - \underline{b}_1$,

$$|\underline{a}| = 3\sqrt{3}, \quad \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (1, 2, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{b}_1 = \left(\frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|^2}\right) \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad \underline{b}_2 = \underline{b} - \underline{b}_1 = (1, 2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

22. Írja fel az $y = \sin(\arctg x)$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó érintőjének egyenletét!
Az érintőegyenes egyenlete:

Az $f(x)$ görbéjének az $(x_0, f(x_0))$ pont beli érintőjének egyenlete $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f(x_0) = \sin(\arctg 1) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ mert } \arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \quad f'(x) = \cos(\arctg x) \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(1) = \cos(\arctg 1) \frac{1}{1+1^2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ tehát az érintő egyenlete}$$

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - 1)$$

$$23. \int_1^2 \frac{4}{\sqrt{x-1} + 1} dx =$$

Először határozatlanul helyettesítéssel: $\sqrt{x+1} = t$, $x+1 = t^2$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t \cdot dt$,

$$4 \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} dx = 4 \int \frac{1}{t+1} (2t) dt = 8 \int \frac{t}{t+1} dt = 8 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 8 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 8(t - \ln|t+1|) + C =$$

A határokat átírhatjuk t-re, ha $x=1$, $t = \sqrt{2}$, ha $x=2$, akkor $t = \sqrt{3}$, azaz

$$\int_1^2 \frac{4}{\sqrt{x+1} + 1} dx = 8 \left[t - \ln|t+1| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = 8(\sqrt{3} - \ln(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)))$$

vagy visszahelyettesíthetjük x-et és akkor megmaradnak az eredeti határok.

$$= 8(t - \ln|t+1|) + C = 8(\sqrt{x+1} - \ln(\sqrt{x+1}+1)) + C$$

persze ugyanaz lesz az eredmény

24. Számítsa ki az $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ és $a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogatát!

Kiszámíthatjuk úgy mint a koordinátákból alkotott determináns értéke.

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

25. Egy felül nyitott, henger alakú, $\frac{1}{2}$ l térfogatú edényt akarunk alumínium lemezből készíteni. Hogyan válasszuk meg az edény sugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk fel, és mennyi lesz ez a felhasznált lemezmennyiség?



A felület függvény $F = F_1 + F_2$ minimumát keressük az alábbi feltételek mellett:

$$V = r^2 \pi \cdot h = \frac{1}{2}, \quad \text{innen} \quad r^2 \pi \cdot h = \frac{1}{2} \quad \text{azaz} \quad h = \frac{1}{2r^2 \pi}$$

$$F = 2\pi r \cdot h + r^2 \pi = 2\pi r \cdot \frac{1}{2r^2 \pi} + r^2 \pi = \frac{1}{r} + r^2 \pi, \quad \text{ott lehet minimuma ahol } F' = 0$$

$$F' = \left(\frac{1}{r} + r^2 \pi \right)' = -\frac{1}{r^2} + 2r\pi = 0 \quad \frac{1}{r^2} = 2r\pi, \quad \frac{1}{r^3} = 2\pi, \quad r^3 = \frac{1}{2\pi}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

Tehát a sugár $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$