Határozatlan határértékű alakok összefoglaló táblázata.

Határozatlan határértékű alakok:

Ha egy függvény $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ alakú és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ szimbolikusan $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

akkor a $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ nem egyértelműen meghatározott, (határozatlan alakú). A határérték az f(x) és g(x) függvénytől függ.

Hasonlóan kell érteni az alábbi táblázatban szereplő szimbolumokat.

Szimbolikusan	1.példa	2.példa
1. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}=-\dfrac{3}{2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$
2. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$
3. $\left(\infty-\infty\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)=0$
4. $\left(0\cdot\infty\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)=\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x=0$
5. $\left(1^{\infty}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=e^2$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^{x^2}=\infty$
6. $\left(0^{0}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\ln x}\right)^x=1$	
7. $\left(\infty^{0}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\ln x}\right)^{-x}=1$	

A $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ és a $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakok határértékének kiszámításában a gyakorlaban nagyon jól használható tétel:

L`Hospital szabály:

Legyenek az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatóak az x_0 hely egy környezetében és legyen itt $g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0$ Legyen továbbá

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=0, \text{ vagy } \lim_{x\to x_0}|g(x)|=\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$$

Ha $\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)}=A$, akkor $\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=A$ ahol x_0 és A lehet valós szám vagy $\pm\infty$.

Példa:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=?$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(1)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

2. Határozott határértékű alakok, konvergencia kritériumok

Szimbolikusan	A szimbólum tartalma	Példa
1. $\left(\frac{C}{0}\right)=\infty$	Ha a számláló konstanshoz tart ($C\neq 0$) és a nevező 0.hoz, akkor a tört - ∞ hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+4x-1}{5x^2-7x+1}}{\sin\frac{1}{x}}=\infty$
2. $\left(\frac{C}{\infty}\right)=0$	Ha a számláló konstanshoz tart és a nevező ∞.hez, akkor a tört -0 hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+4x-1}{5x^2-7x+1}}{\ln x}=0$
3. $\left(\frac{\infty}{0}\right)=\infty$	Ha a számláló végtelenhez tart és a nevező 0.hoz, akkor a tört - ∞ hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-1}{\sin\frac{1}{x}}=0$
4. $\left(\frac{0}{\infty}\right)=0$	Ha a számláló 0.hoz tart és a nevező végtelenhez, akkor a tört - 0 hoz tart	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\frac{x-1}{x^2}}=0$
5. $\left(C^{\infty}\right)=\infty$ (C>1)	Ha egy függvény alapja egynél nagyobb konstanshoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört ∞-hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-7x+1}\right)^x=\infty$
6. $\left(C^{\infty}\right)=0$ (0<C<1)	Ha egy függvény alapja egynél kisebb pozitív konstanshoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört 0-hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^x=0$
7. $\left(\infty^{c}\right)=\infty$ (c>0)	Ha egy függvény alapja ∞-hez tart és a kitevője konstanshoz ami nagyobb mint 0, akkor a tört ∞ -hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^{\frac{x-1}{3x}}=\infty$
8. $\left(C^{0}\right)=1$ (c>0)	Ha egy függvény alapja pozitív konstanshoz tart és a kitevője 0-hoz, akkor a tört 1-hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}=1$
9. $\left(0^{\infty}\right)=0$	Ha egy függvény alapja 0-hoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört 0-hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-1}{3x^3-7x+1}\right)^{3x}=1$
10 $\left(0\cdot korlátos\right)=0$	Ha egy szorzat egyik tényezője korlátos a másik pedig 0-hoz tart, akkor a szorzat 0.hoz tart.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

A

Gyakorló feladatok:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3}{2x-1}=\frac{4}{1}$, határozott alakú $\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}=?$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-2}=-\frac{3}{2}$$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=\dfrac{-6}{-2}=3$ határozott alakú $\left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+3)^2-9}{x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+3)^2-9}{x}=\lim_{x\to0}\frac{((x+3)-3)((x+3)-3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x((x+3)+3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{((x+3)+3)}{1}=6$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=?$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=?\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin5x}{x}$ 2. táblázat 10. sor, precízen rendőrelvvel $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin5x}{x}\le\dfrac{1}{x}$

mivel mindkét oldal 0-hoz tart $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin5x}{x}=0$ (Korlátos függvény szorozva 0-hoz tartó függvénnyel 0-hoz tart)

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{thx}{x}=?$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{thx}{x}=0$, mert $|thx|<1$ és $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 2. táblázat 10. sor, korlátos szor nullához tartó nullához tart!

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{tg10x}$ =? $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{tg10x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{tg10x}\cdot\frac{10x}{5x}\cdot\frac{1}{2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{10x}{\sin10x}\cdot\frac{\cos10x}{2}=\frac{1}{2}$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=?$ $\left(1^{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x}\cdot\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3+x}{x}}{\frac{1+x}{x}}\right)^x=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{e^3}{e}=e^2$$, valamint

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$ rendőrelvvel

$(7)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}<\left(\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}<(8)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ mivel $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x=e^2$ a feladat első része alapján és $e^2\approx 7{,}3441$ és $\lim_{x\to\infty}(7)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}(8)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$, ezért a középső is 1-hez tart..

Tehát $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=e^2\cdot 1=e^2$

11. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(x+1+\frac{-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

12. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x=?$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x=\infty$, nem határozatlan alakú, mert az alap 2-höz tart a kitevő pedig ∞,

(2. táblázatban 5.-sor)

precízen: ha $\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)\to 2$, akkor ha x elég nagy, akkor $\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)>1{,}9$ így

$(1{,}9)^x<\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x$ és $\lim_{x\to\infty}(1{,}9)^x=+\infty$, tehát $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x=\infty$

13. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\frac{\sqrt{16+x}+4}{\sqrt{16+x}+4}=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{\left(\sqrt{16+x}\right)^2-16}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{16+x-16}=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{16+x}+4}{1}=8=$$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, tehát a szorzat határértéke 8.

14. $\lim_{x\to0}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=1\cdot0=0$$

15. $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)\frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4-x\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}=\infty$$

16. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)}{1}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\left(x^2+2\right)\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-2)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=0$$

17. $\lim_{x\to0}\frac{shx}{x}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú, L`Hospital szabály alkalmazásával

$$\lim_{x\to0}\frac{shx}{x}=\lim_{x\to0}\frac{chx}{1}=1$$

18. $\lim_{x\to0}x\cdot\ln x=0$, $\left(\quad 0\cdot\infty\quad\right)$ határozatlan alakú L`Hospital szabály alkalmazásával

$$\lim_{x\to0}x\cdot\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to0}(-x)=0$$

19. $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)}{\sqrt{x}}=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú, L`Hospital szabály alkalmazásával