

Függvényvizsgálat

A függvényvizsgálat a következőket tartalmazza:

1. A függvény értelmezési tartománya
2. A függvény határértékei a „kritikus helyeken” (a $\pm\infty$ -ben, és ahol határozatlan alakú $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ..stb)
3. A függvény monoton szakaszai
4. A függvény szélsőértékei
5. A függvény a konvex és konkáv szakaszai
6. A függvény az inflexiós pontjai
7. A függvény asszimptotái
9. A függvény értékkészlete
10. A függvény grafikonja a fentiek alapján.

Tételek, melyek szükségesek a függvényvizsgálathoz.

Tétel: (lokális növés és csökkenés)

Legyen $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható:

Ekkor, $f(x)$ akkor és csak akkor nő lokálisan az x_0 pontban, hogy $f'(x_0) > 0$,

$f(x)$ akkor és csak akkor csökken lokálisan az x_0 pontban, hogy $f'(x_0) < 0$,

Tétel: szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$

Tétel. (lokális minimum)

Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f'(x_0) = 0$, és $f'(x_0)$ lokálisan növény az x_0 pontban, akkor az $f(x)$ függvénynek lokális minimuma van ebben a pontban.

Tétel. (lokális maximum)

Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f'(x_0) = 0$, és $f'(x_0)$ lokálisan csökken, akkor az $f(x)$ függvénynek lokális maximuma van ebben a pontban.

Tétel.

Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt kétszer differenciálható is, továbbá teljesül, hogy $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek lokális minimuma van ebben a pontban.

Tétel.

Ha az $f(x)$ függvény értelmezve van az x_0 pontban és annak egy környezetében, valamint itt differenciálható is, továbbá teljesül, hogy

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor az $f(x)$ függvénynek lokális maximuma van ebben a pontban.

Tétel:

Az $[a, b]$ intervallumon differenciálható $f(x)$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha $f'(x)$ monoton növekvő.

Tétel:

Az $[a, b]$ intervallumon differenciálható $f(x)$ függvény akkor és csak akkor konkáv, ha $f'(x)$ monoton csökkenő.

Tétel:

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon kétszer differenciálható és ha $f''(x_0) > 0$ akkor az $f(x)$ függvény konvex
ha $f''(x_0) < 0$, akkor az $f(x)$ függvény konkáv.

Tétel:

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon kétszer differenciálható és az $f(x)$ függvény konvex, akkor $f''(x_0) \geq 0$
az $f(x)$ függvény konkáv, akkor $f''(x_0) \leq 0$.

Egy függvény konvex és konkáv részeinek csatlakozási pontját inflexióspontnak nevezzük.

Tétel:

Ha az x_0 pontban és annak egy környezetében kétszer differenciálható $f(x)$ függvénynek inflexióspontja van, akkor $f''(x_0) = 0$.

A függvényvizsgálat menete a következő.

1. Meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát
2. Meghatározzuk a függvény határértékeit a „kritikus helyeken” (a $\pm\infty$ -ben, és ahol határozatlan alakú)
3. Előállítjuk az $f'(x)$ derivált függvényt
4. Előállítjuk az $f''(x)$ második derivált függvényt
5. Meghatározzuk az $f'(x) = 0$ és az $f''(x) = 0$ gyökhelyeket
6. A kapott gyökhelyeket sorba rendezzük nagyság szerint
7. Felosztjuk az értelmezési tartományt olyan szakaszokra ahol $f'(x)$ és $f''(x)$ előjele állandó. Ha $f'(x)$ is és $f''(x)$ is folytonos függvények, akkor a gyökhelyeket sorba rendezve ilyen felbontást kapunk.

Vigyázat! Ha például valahol a derivált függvénynek ∞ a határértéke, akkor előjelet tud váltani anélkül, hogy nulla lenne. Pl: $\frac{1}{x}$

8. A felbontás szakaszain, megállapítjuk a függvény növekvés/fogyás és konkáv/konvex viselkedését.
9. Ezek alapján megállapítjuk az inflexióspontokat és a szélsőérték pontokat.
10. Felvázoljuk a függvényt. A felvázolásnál segítség a függvény értékének meghatározása egy-két pontban, például ahol a tengelyeket el metszi $x=0$, $y=0$

Példa:

Vizsgáljuk meg a következő $y = 5 - \frac{10x}{x^2 + 1}$ függvényt!

$$f(x) = 5 - \frac{10x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{10x}{x^2 + 1} \right) = 5$$

$$f'(x) = - \left(\frac{10 \cdot (x^2 + 1) - 10x(2x)}{(x^2 + 1)^2} \right) = - \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2} = 10 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \quad 1 - x^2 = 0,$$

$$x = \pm 1$$

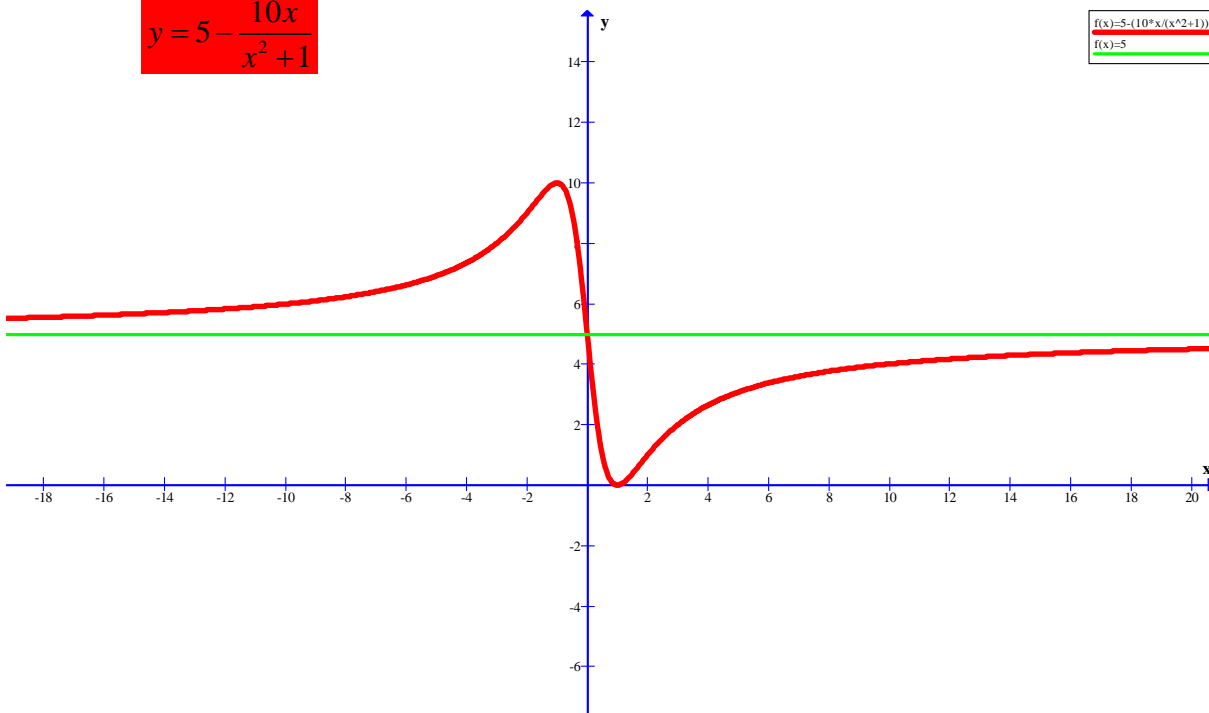
$$f''(x) = 10 \left(\frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)(2x)(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4} \right) = \frac{20x(x^2 + 1)(-x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^4} = 0, \text{ ha } x = 0,$$

vagy $x = \pm\sqrt{3}$,

sorba rendezve: $-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}$,

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f(x)$	$\cup \nearrow$	inflexi ó	$\cap \nearrow$	max	$\cap \searrow$	inflexi ó	$\cup \searrow$	min	$\cup \searrow$	inflexi ó	$\cap \nearrow$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-

$$y = 5 - \frac{10x}{x^2 + 1}$$



Feladat:

Vizsgáljuk meg az $y = (x+2) \cdot x^{\frac{2}{3}}$ függvényt!

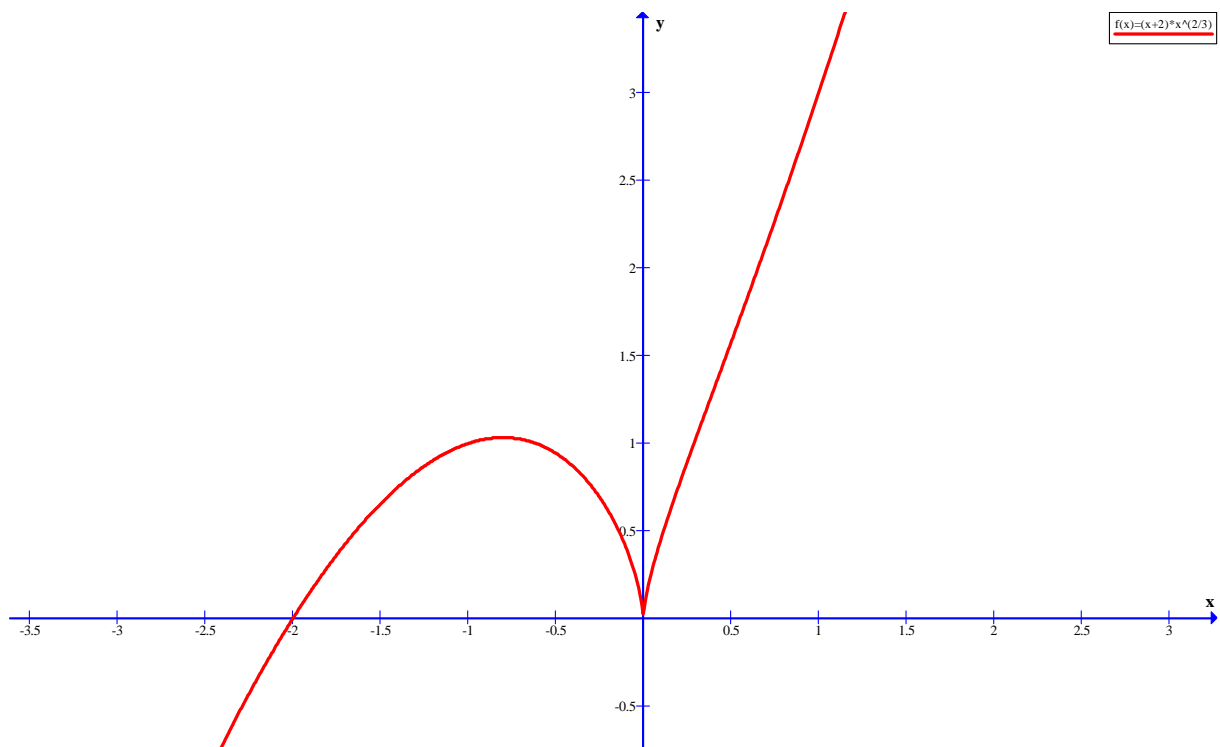
$$y' = x^{\frac{2}{3}} + (x+2) \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2(x+2)}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3x+2x+4}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x+4}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$y'' = \left(\frac{5x+4}{3x^{\frac{1}{3}}} \right)' = \frac{15x^{\frac{1}{3}} - (5x+4)x^{-\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{15x - (5x+4)}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{10x-4}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

$$y' = 0, \text{ ha } x = -\frac{4}{5}, \quad y'' = 0, \text{ ha } x = \frac{2}{5}$$

$$y = (x+2) \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{4}{5})$	$-\frac{4}{5}$	$(-\frac{4}{5}, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, \infty)$	
f	$\cap \nearrow$		$\cap \nearrow$	max	$\cap \searrow$	min	$\cap \nearrow$		$\cup \nearrow$	
f'	+	+	+	0	-	∞	+	+		
f''	-	-	-	-	-	∞	-	0	+	



$$y = x - \cos x,$$

