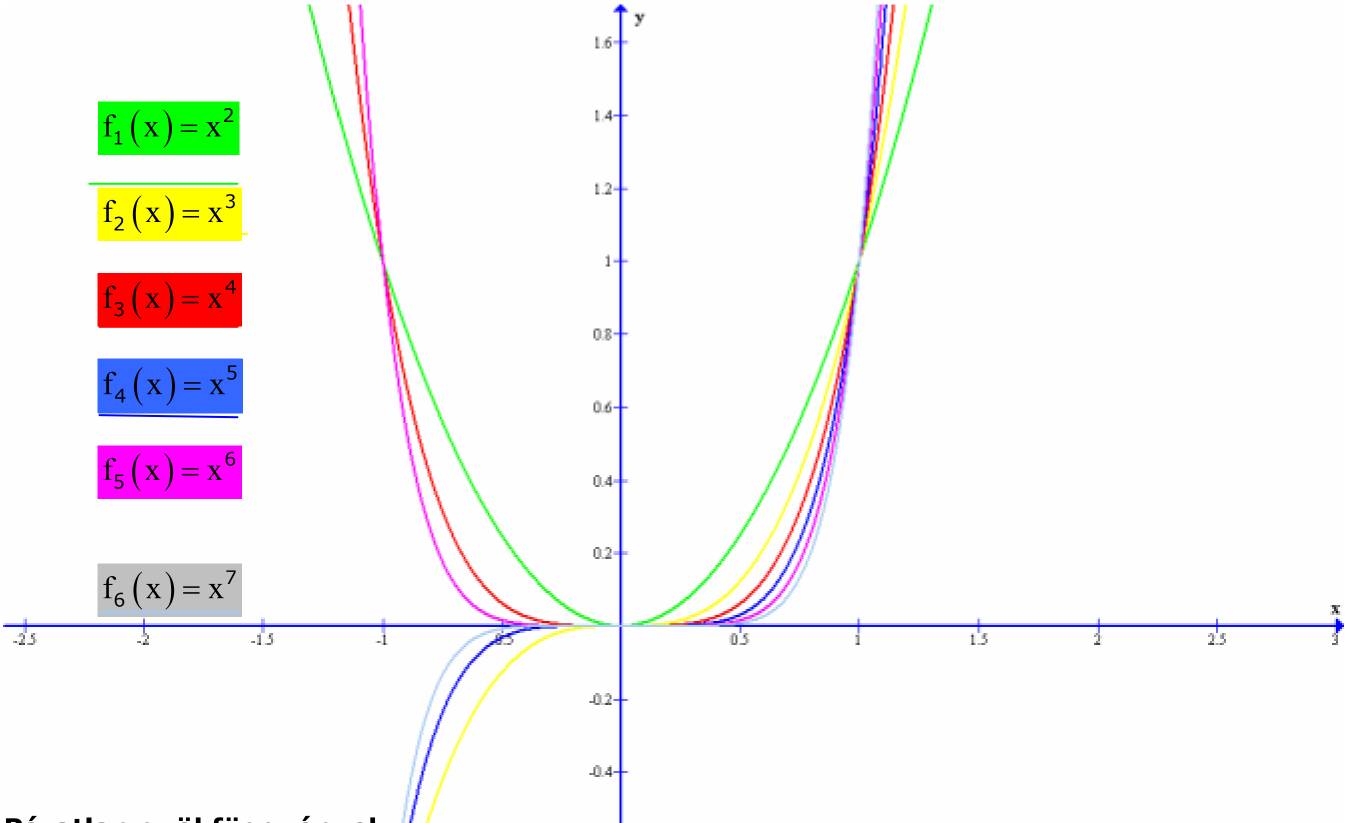
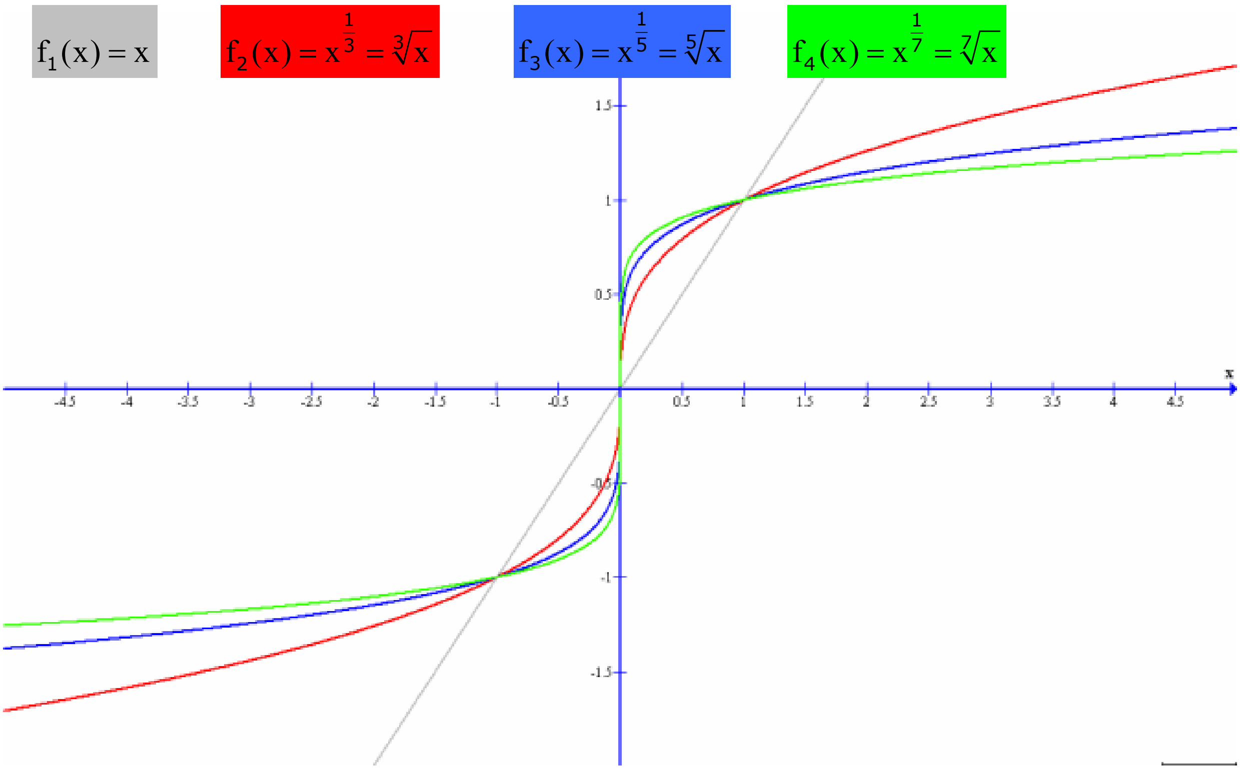
Tartalomjegyzék

Valós változós valós értékű függvények

Hatványfüggvények: $f(x)=x^k$ **ahol k pozitív egész szám**

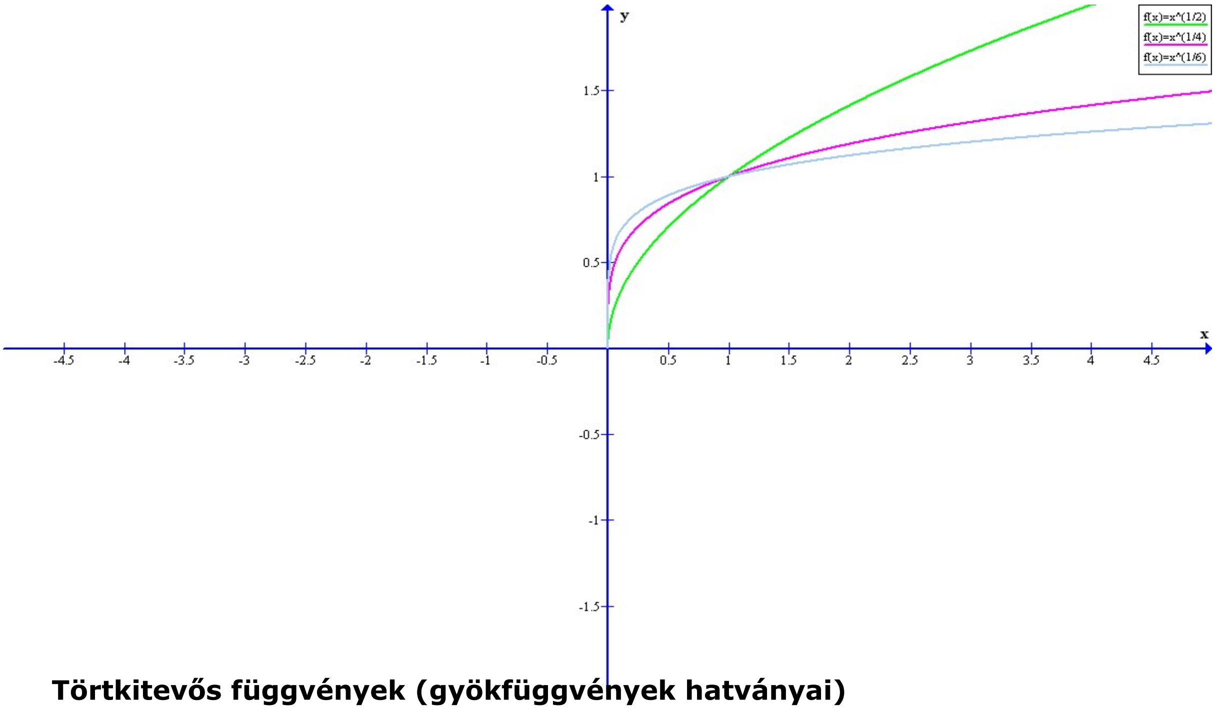


Páratlan gyökfüggvények:



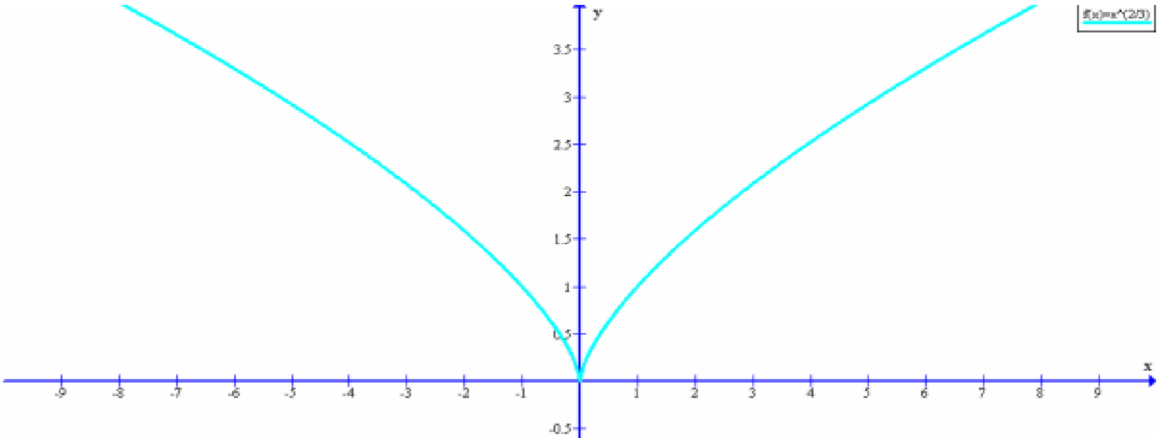
Páros gyökfüggvények

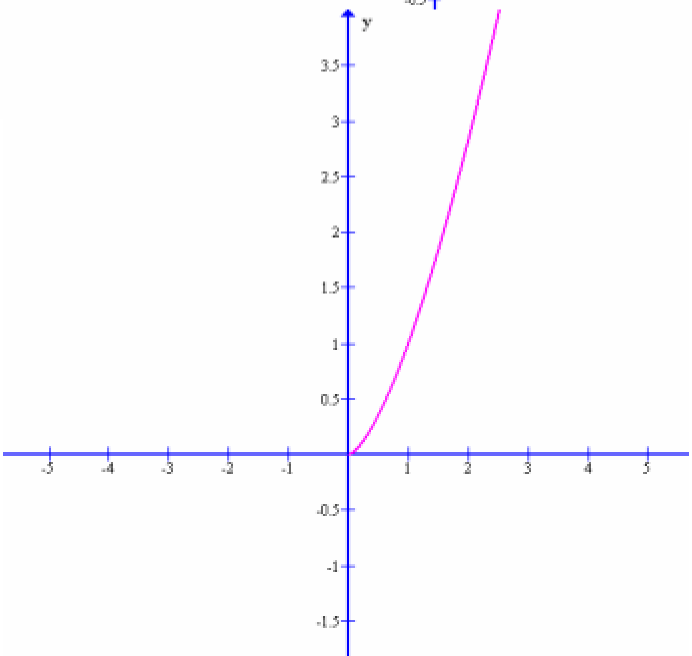
$f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ $f_2(x)=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$ $f_3(x)=x^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{x}$



Törtkitevős függvények (gyökfüggvények hatványai)

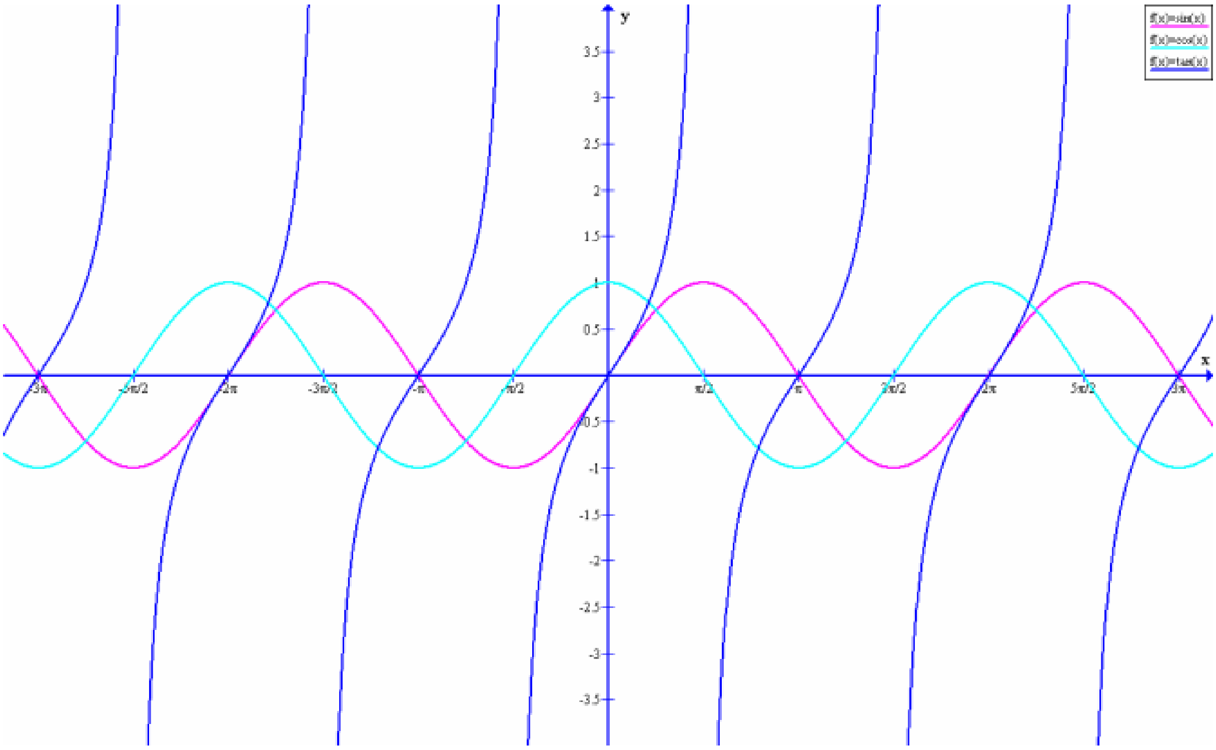
$y=x^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=\sqrt[3]{x^2}$





$y=x^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{x}\right)^3=\sqrt{x^3}$

Trigonometrikus függvények (*sinx*, *cosx*, *tanx*)

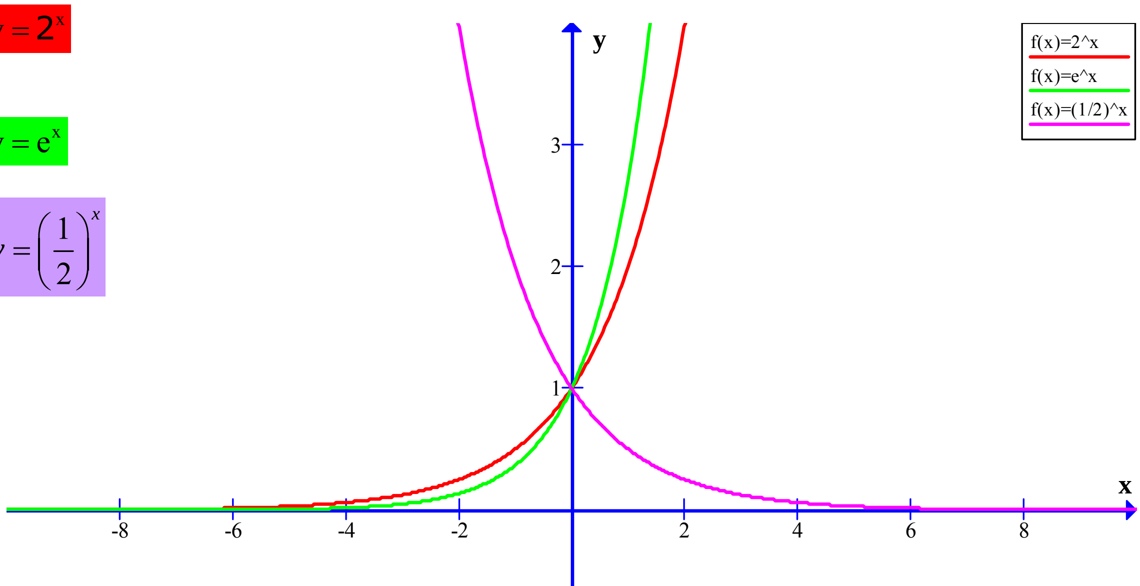


Exponenciális függvények: $f(x) = a^x$ (a>0)

$y = 2^x$

$y = e^x$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Természetes alapú exponenciális függvény

$y = e^x$ ahol az alapszám egy nevezetes sorozat határértéke: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

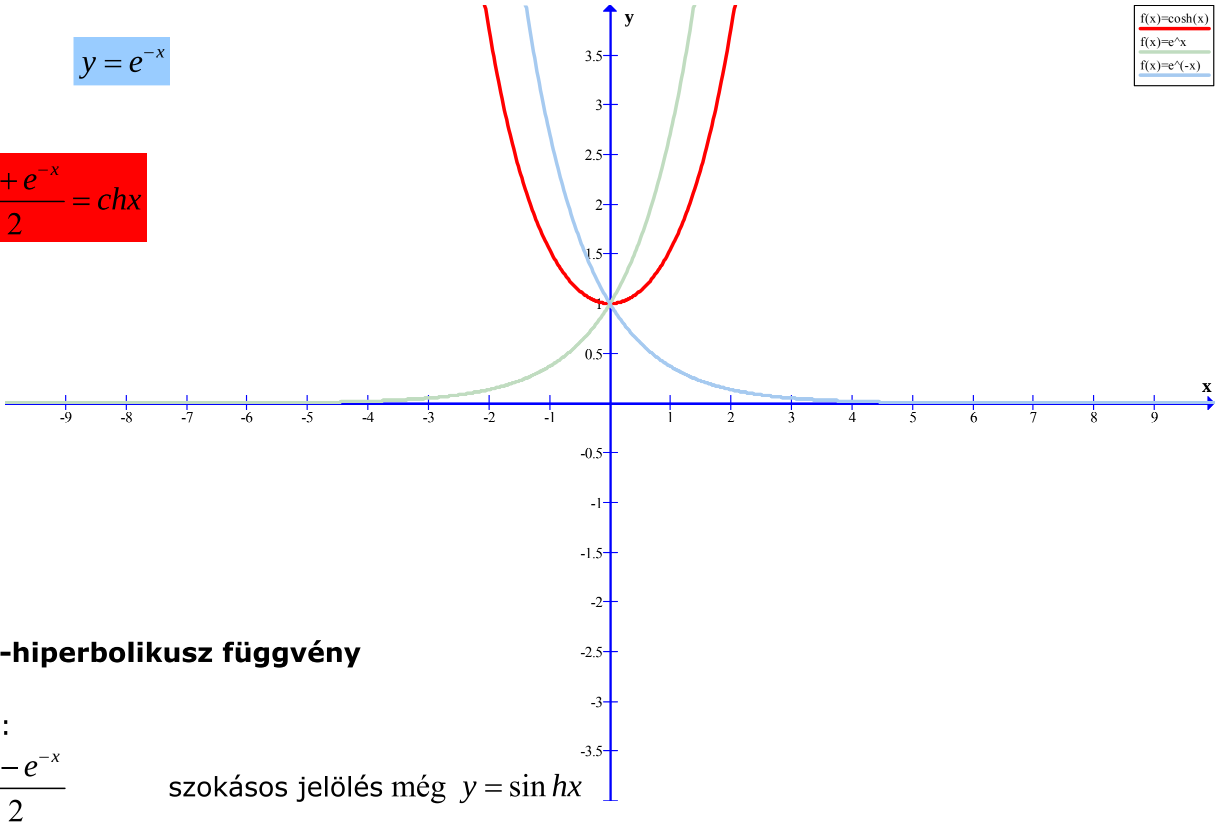
Hiperbolikus függvények

Koszinusz-hiperbolikusz függvény

Definíció: $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ szokásos jelölés még $y = \cosh x$

$y = e^x$ $y = e^{-x}$

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$



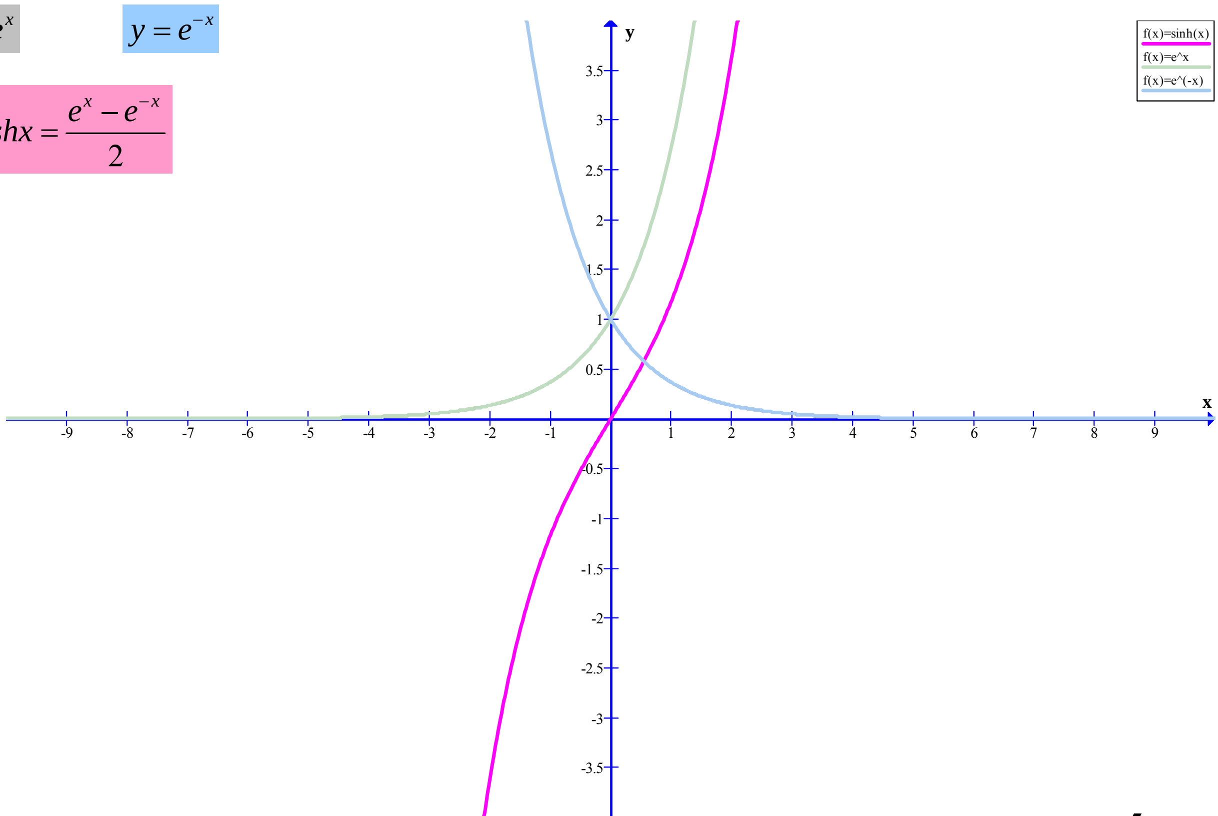
Szinusz-hiperbolikusz függvény

Definíció:

$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ szokásos jelölés még $y = \sin hx$

$y = e^x$ $y = e^{-x}$

$y = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

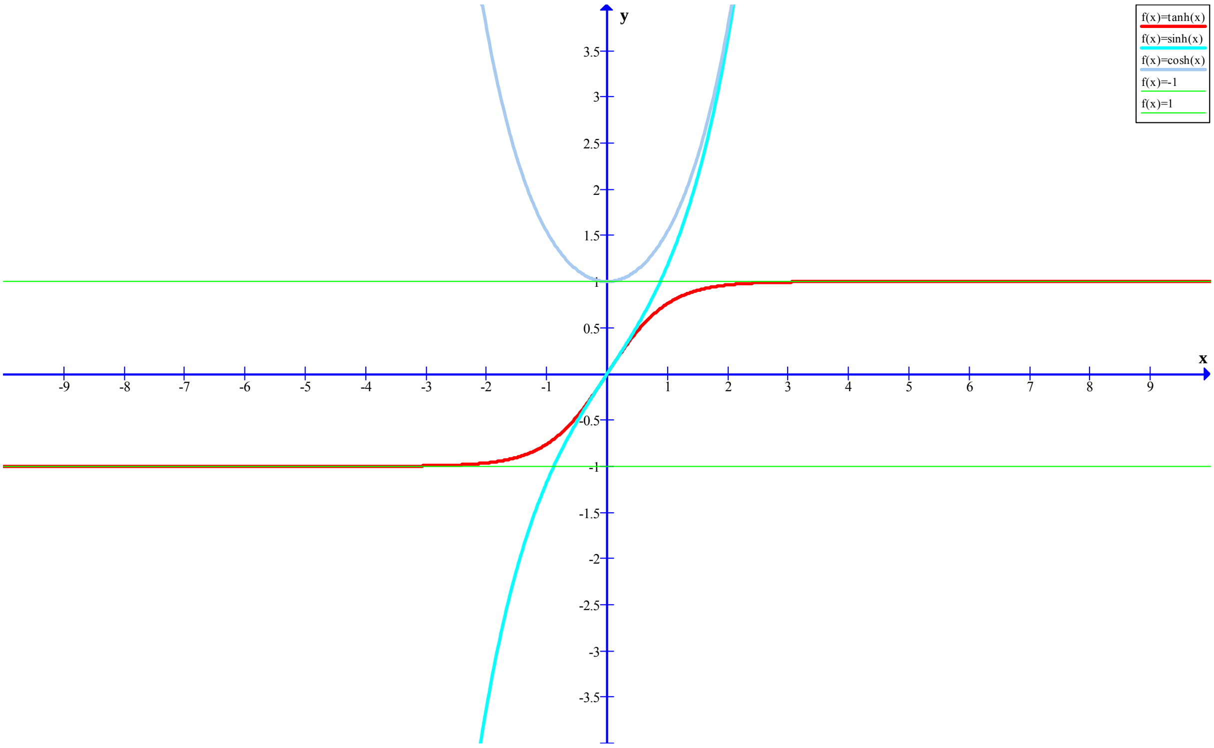


Tangens-hiperbolikusz függvény

Definíció:

$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ szokásos jelölés még $y = \tanh x$

$$y = \frac{shx}{chx} = thx$$



Inverz függvények

Definíció:inverz függvény

Az f függvény inverz függvényének nevezzük és f^{-1}-el jelöljük azt a függvényt, mely minden valós a számhoz (mely az f függvény az értékkészletéhez tartozik), azt a b számot rendeli, melyhez az f az a-t rendelte, vagyis:

Ha $f(b)=a$, akkor $f^{-1}(a)=b$

Innen következik, hogy $f\left(f^{-1}(a)\right)=a$ és $f^{-1}\left(f(b)\right)=b$

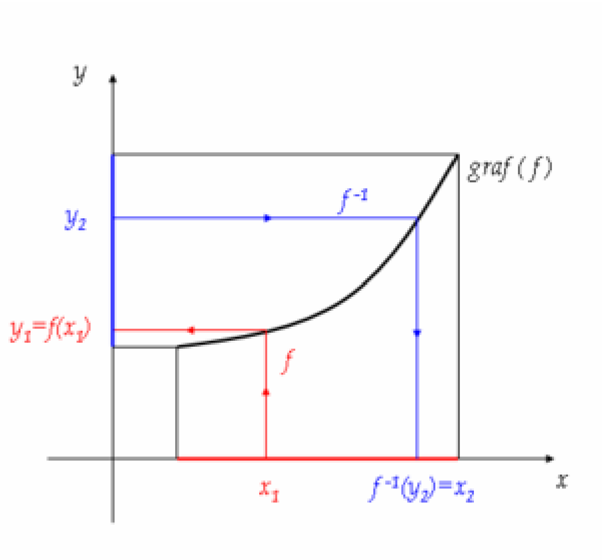
Innen következik, hogy az f^{-1} értelmezési tartománya az f értékkészlete, és f^{-1} értékkészlete az f értelmezési tartománya.

Jelben: $D\left(f^{-1}\right)=R(f)$, és $R\left(f^{-1}\right)=D(f)$

Tehát csak kölcsönösen egyértelmű függvénynek van inverze, hiszen szükséges, hogy b egyértelmű legyen.

Tétel: invertálhatóság elégséges feltétele

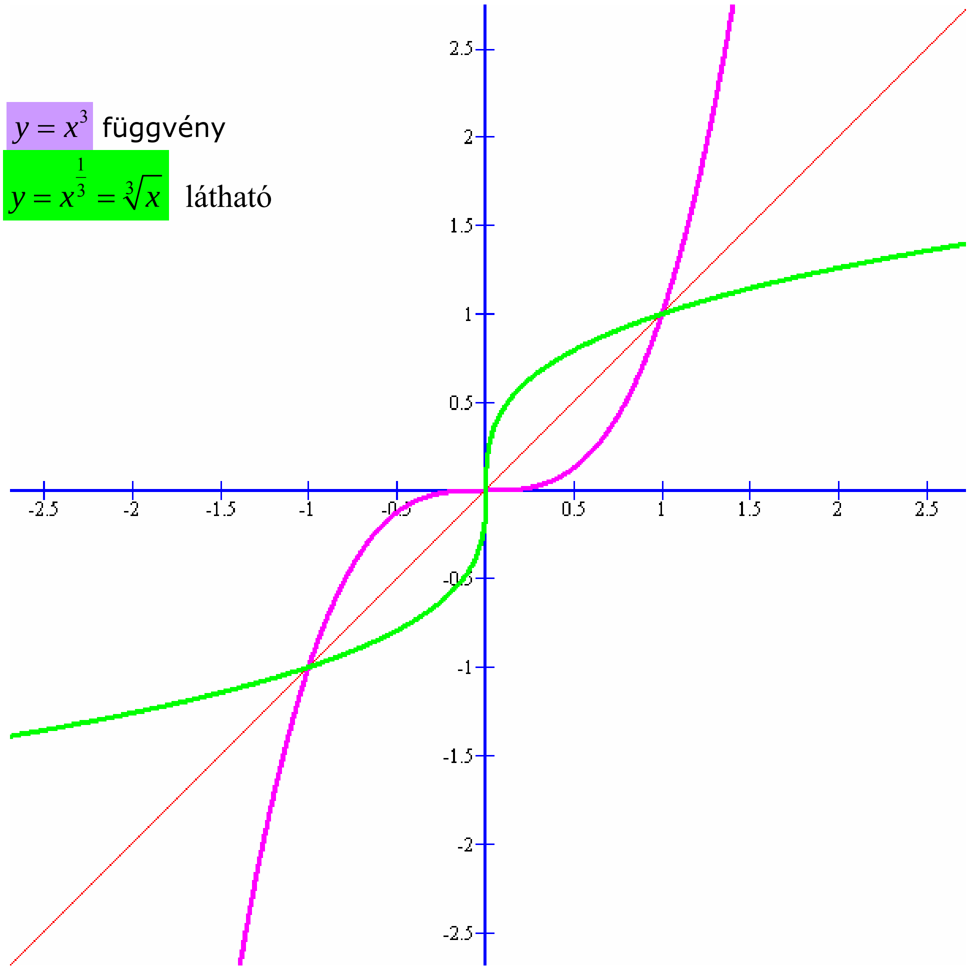
A függvény invertálhatóságának elégséges feltétele a függvény szigorú monotonitása, hiszen szig. monoton függvény esetén ha $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$



Az f^{-1} függvény és az f függvény grafikonja egymásnak az $y=x$ egyenesre vett tükörképe

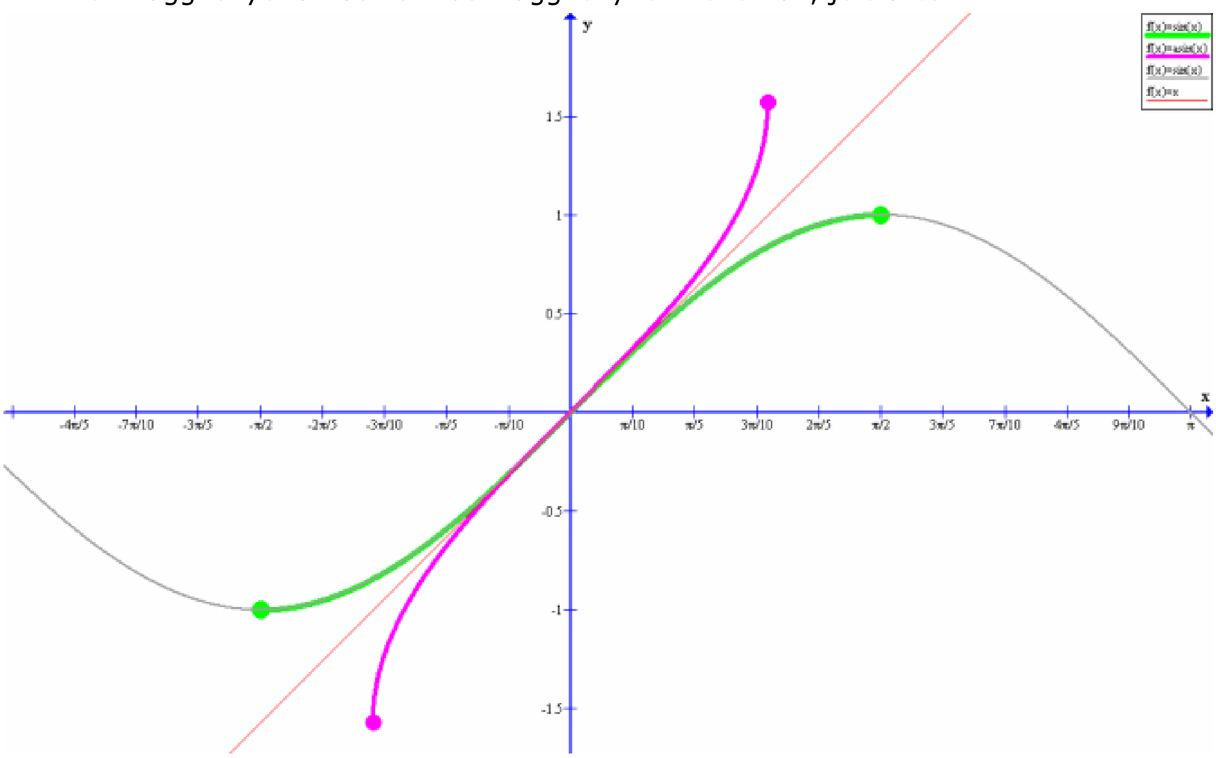
A képen az $y=x^3$ függvény

és inverze az $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ látható



Az $y=\sin x$ függvény nem invertálható a $(-\infty,+\infty)$ intervallumon, mert nem kölcsönösen egyértelmű. Invertálható a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tartományon, itt szigorúan monoton nő.

Az inverz függvényét arkusz-szinusz függvénynek nevezzük, jele arcsinx



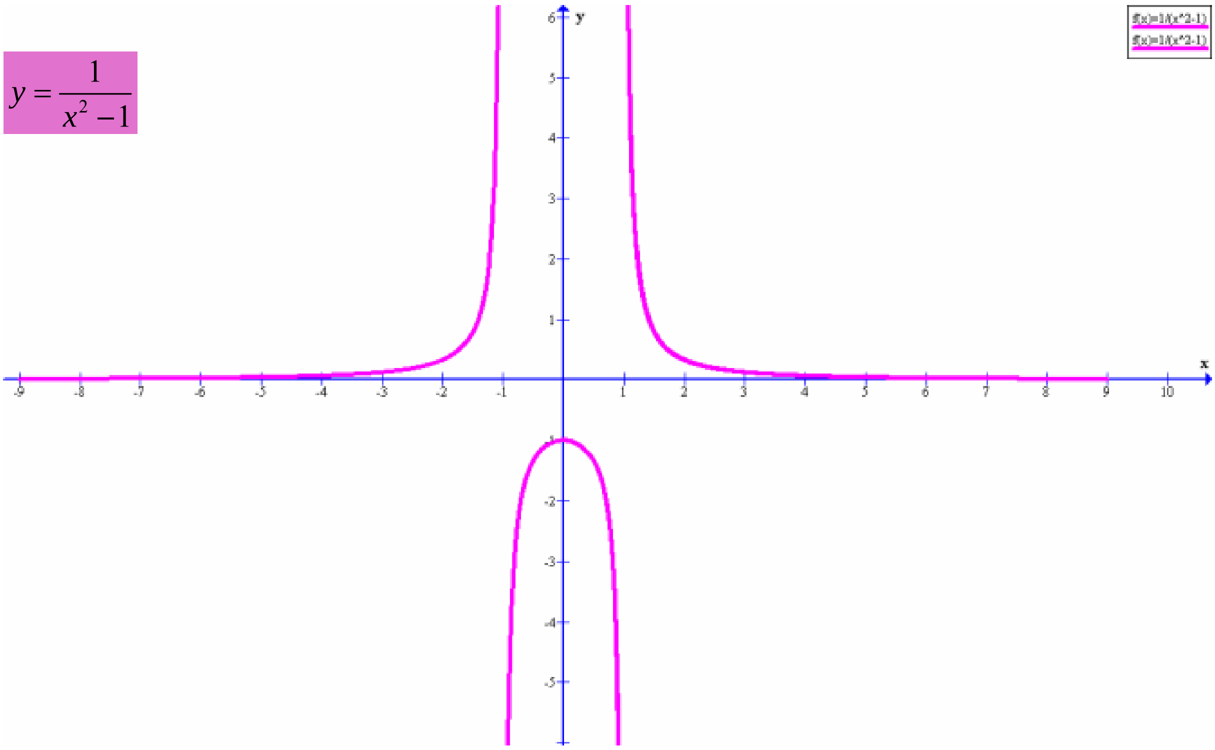
Az $y = \arcsin x$ értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum ,értékkészlete $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Hasonlóan ábrázolhatjuk a trigonometrikus függvények inverzeit a szigorúan monoton szakaszokon.

Példa

Adjuk meg, hogy az $y = \frac{1}{x^2-1}$ függvény hol invertálható és ott adjuk meg az inverzét.

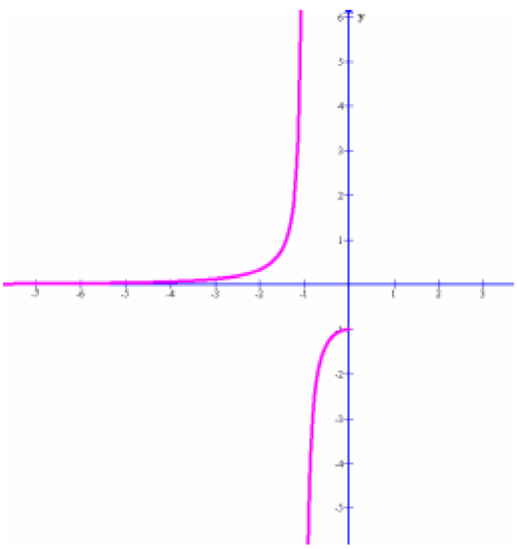
Megoldás: A függvény nem kölcsönösen egyértelmű,

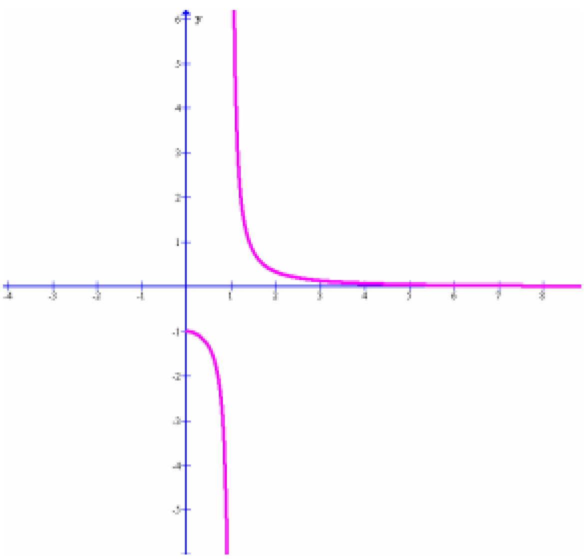


De felbontható két szigorúan monoton (kölcsönösen egyértelmű) szakaszra:

1. $y = \frac{1}{x^2-1}$ ha $x > 0$

2. $y = \frac{1}{x^2-1}$, ha $x < 0$





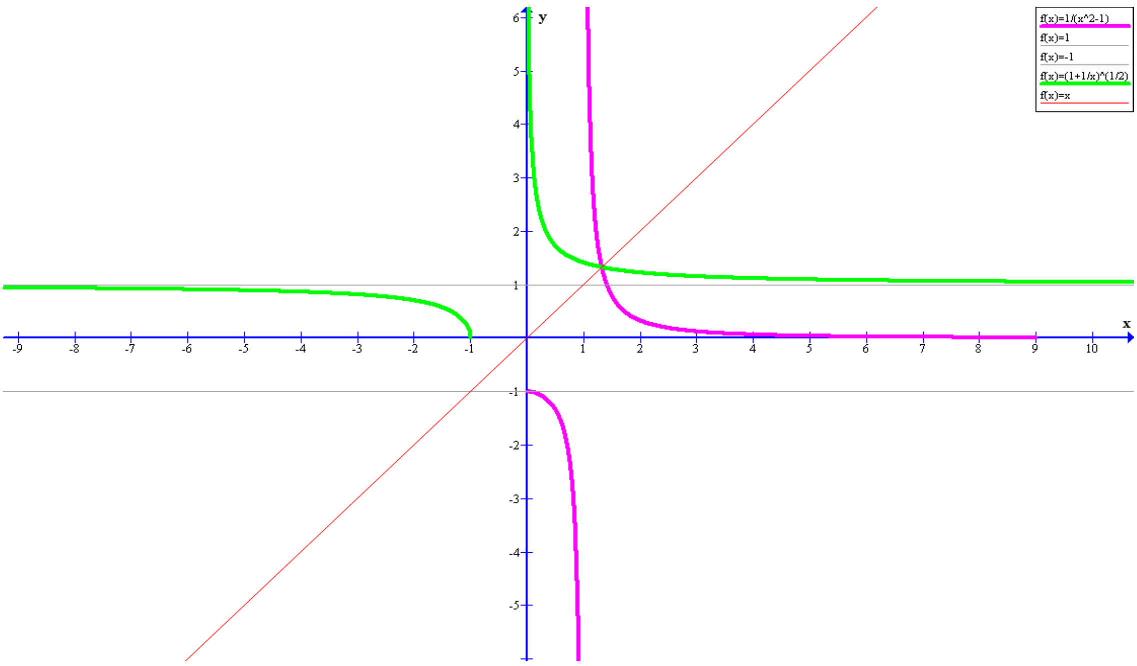
A függvénykapcsolatból x-et kifejezve adódik az inverz függvénykapcsolat, ezután x és y szerepét felcserélve kapjuk az inverz függvényt az $[x, y]$ koordináta-rendszerben.

Vagyis $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $\dfrac{1}{y} = x^2 - 1$, $\dfrac{1}{y} + 1 = x^2$,

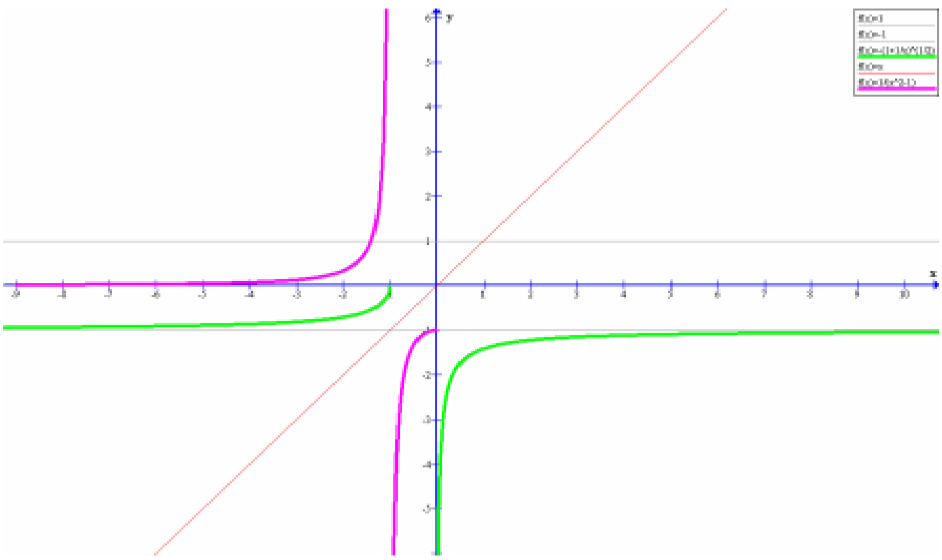
$x = \sqrt{\dfrac{1}{y} + 1}$, az $x > 0$ ágra, illetve $x = -\sqrt{\dfrac{1}{y} + 1}$ a $x < 0$ ágra.

Felcserélve x és y szerepét kapjuk,hogy:

Az $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ ($x > 0$) inverze $y = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$



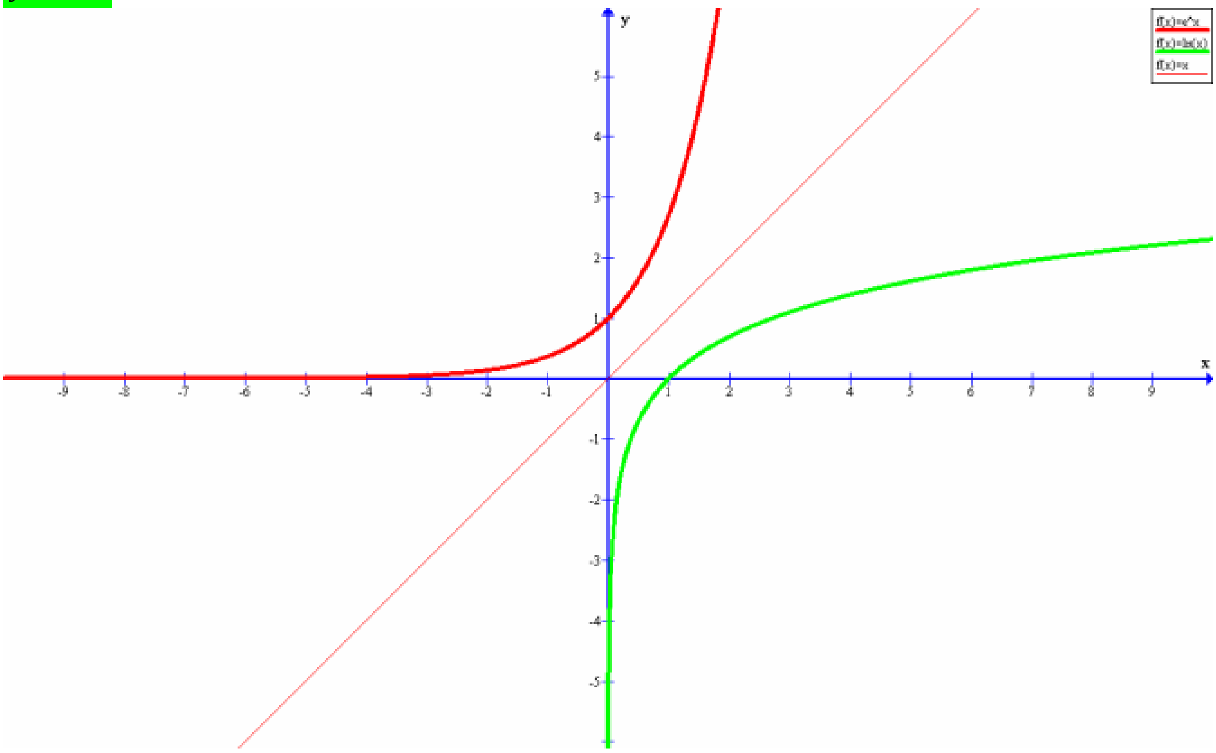
Az $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ ($x < 0$) inverze $y = -\sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$



Természetes alapú logaritmus függvény: $f(x) = \ln x$

A függvény szigorúan monoton, tehát mindenhol létezik az inverze, ezt a függvényt nevezzük **természetes alapú logaritmus függvénynek**

$y = \ln x$



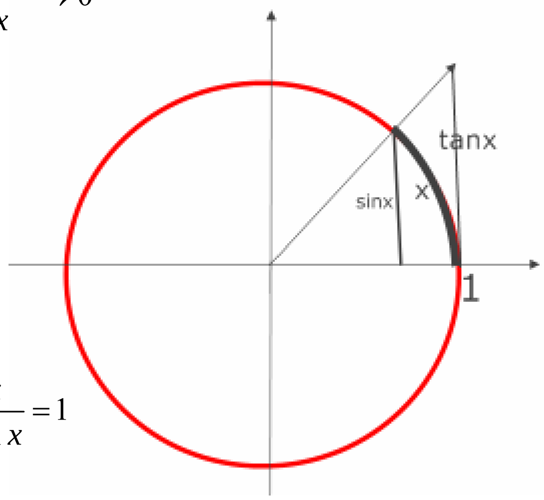
A továbbiakban az eddig felsorolt függvényekből „összeállított" függvényeket fogjuk vizsgálni. Összeállítás jelenti a fenti függvények konstans szorosát, összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát, összetett függvényét, inverz függvényét fogjuk vizsgálni. Megvizsgáljuk a különböző x helyeken és a végtelenben a határértékeiket. A célunk az, hogy minél pontosabban fel tudjuk vázolni a grafikonjukat.

Nevezetes határértékek

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ bizonyítás rendőrelv segítségével

Mivel $-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$ és $-\frac{1}{x}\to 0$ és $\frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x}\to 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, bizonyítás rendőrelvvel



Ívmértekkel mérve az x szöget
$\sin x\le x\le \tan x$, innen sinx-el osztva

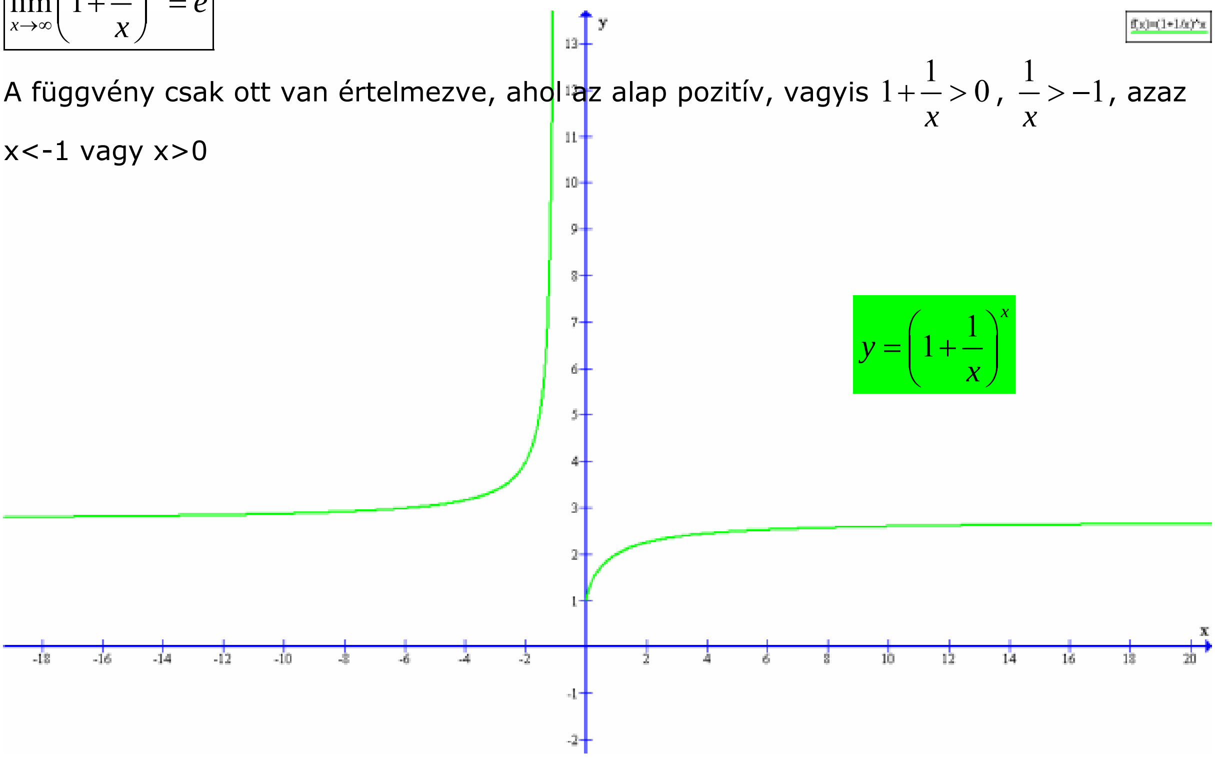
$$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}$$

Mivel $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$ ezért a rendőrelv szerint $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\sin x}}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

A függvény csak ott van értelmezve, ahol az alap pozitív, vagyis $1+\frac{1}{x}>0$, $\frac{1}{x}>-1$, azaz x<-1 vagy x>0



$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, bizonyítás vázlat. Belátjuk, hogy ha $x\to+\infty$, akkor van a függvénynek határértéke. Ez nem lehet más, mint az egész helyeken véve a határértéket ami $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

Határozatlan határértékű alakok összefoglaló táblázata.

Határozatlan határértékű alakok:

Ha egy függvény $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ alakú és $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ szimbolikusan $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

akkor a $\lim_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ nem egyértelműen meghatározott (határozatlan alakú).

A határérték az f(x) és g(x) függvénytől függ.

Hasonlóan kell érteni az alábbi táblázatban szereplő szimbólumokat.

A határozatlan alakokat határozott alakúvá kell alakítani úgy, hogy már ismert határérték függvénye legyen.

Ismertnek tételezzük a következő határértékeket:

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ $\left(1^{\infty}\right)$ (a ∞ lehet akár $+\infty$ vagy $-\infty$)

valamint $\dfrac{1}{x}$ helyettesítéssel $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\left(1^{\infty}\right)$ (a 0 lehet akár $+0$ vagy -0)

Szimbolikusan	**1. példa**	**2. példa**
$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$	$\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{1-2x^2} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-2} = -\dfrac{3}{2}$	
$\left(\dfrac{0}{0}\right)$	$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$	
$\left(\infty-\infty\right)$	$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^4}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x^4}+\sqrt{x}\right) = \infty$	
$\left(0\cdot\infty\right)$	$\lim_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot 2\sqrt{x}\right) = 0$	
$\left(1^{\infty}\right)$	$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$	
$\left(0^{0}\right)$	$\lim_{x\to 0}x^x = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln x}\right)^x = 1$	
$\left(\infty^{0}\right)$	$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln x}\right)^{-x} = 1$	

Határozott határértékű alakok, konvergencia kritériumok

Szimbolikusan	A szimbólum tartalma	Példa
1. $\left(\frac{C}{0}\right)=\infty$	Ha a számláló konstanshoz tart ($C\neq 0$) és a nevező 0.hoz, akkor a tört - ∞ hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+4x-1}{5x^2-7x+1}}{\sin\frac{1}{x}}=\infty$
2. $\left(\frac{C}{\infty}\right)=0$	Ha a számláló konstanshoz tart és a nevező ∞.hez, akkor a tört -0 hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+4x-1}{5x^2-7x+1}}{\ln x}=0$
3. $\left(\frac{\infty}{0}\right)=\infty$	Ha a számláló végtelenhez tart és a nevező 0.hoz, akkor a tört - ∞ hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-1}{\sin\frac{1}{x}}=\infty$
4. $\left(\frac{0}{\infty}\right)=0$	Ha a számláló 0.hoz tart és a nevező végtelenhez, akkor a tört - 0 hoz tart	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\frac{x-1}{x^2}}=0$
5. $\left(C^{\infty}\right)=\infty$ (C>1)	Ha egy függvény alapja egynél nagyobb konstanshoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört ∞-hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-7x+1}\right)^x=\infty$
6. $\left(C^{\infty}\right)=0$ (0<C<1)	Ha egy függvény alapja egynél kisebb pozitív konstanshoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört 0-hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^x=0$
7. $\left(\infty^{c}\right)=\infty$ (c>0)	Ha egy függvény alapja ∞-hez tart és a kitevője konstanshoz ami nagyobb mint 0, akkor a tört ∞ -hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^{\frac{x-1}{3x}}=\infty$
8. $\left(C^{0}\right)=1$ (c>0)	Ha egy függvény alapja pozitív konstanshoz tart és a kitevője 0 -hoz, akkor a tört 1-hez tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+4x-1}{3x^2-7x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}=1$
9. $\left(0^{\infty}\right)=0$	Ha egy függvény alapja 0-hoz tart és a kitevője ∞-hez, akkor a tört 0-hoz tart	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-1}{3x^3-7x+1}\right)^{3x}=1$
10 $\left(0\cdot korlátos\right)=0$	Ha egy szorzat egyik tényezője korlátos a másik pedig 0-hoz tart, akkor a szorzat 0.hoz tart.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

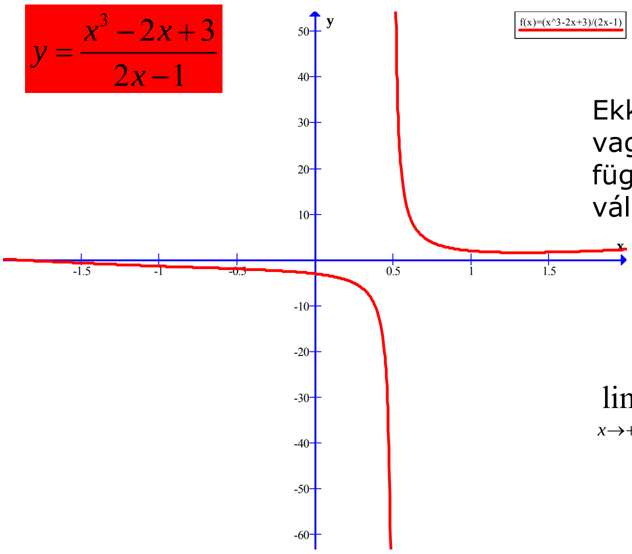
Gyakorló feladatok megoldással:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3}{2x-1}=?$ határozott alakú $\left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)$ behelyettesítve x=1 et

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3}{2x-1}=\frac{4}{1}$$

2. $\lim\limits_{x\to +\frac{1}{2}}\dfrac{x^3-2x+3}{2x-1}=?$ Határozott $\left(\dfrac{C}{0}\right)=\infty$ alakú, de pontosabban a kérdés azaz, hogy mennyi a határérték ha x jobbról tart az $\dfrac{1}{2}$-hez.

$$y=\frac{x^3-2x+3}{2x-1}$$



Ekkor azt kell megvizsgálni, hogy $+\infty$ vagy $-\infty$ hez tart a függvény. A függvény grafikonján látható, hogy a válasz az, hogy a függvény $+\infty$

$$\lim_{x\to +\frac{1}{2}}\frac{x^3-2x+3}{2x-1}=+\infty$$

Az ábra ismerete nélkül a függvény előjeléből lehet megállapítani ugyanezt. Azt kell mondani, hogy végtelenhez tart és ha $x>\dfrac{1}{2}$ akkor a függvény előjele pozitív (úgy állapíthatom meg, hogy behelyettesítek egy 1-nél nagyobb számot pl. x=1- t).

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}=?$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2+4x-1}{1-2x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-2}=-\frac{3}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=\dfrac{-6}{-2}=3$ határozott alakú $\left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$határozatlan alakú, a számlálót és a nevezőt a leg „gyorsabban” ∞-hez tartóval azaz x^3-el osztva:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}$ már határozott $\left(\frac{C}{0}\right)=\infty$ alakú, mert a számláló konstanshoz a nevező pedig 0-hoz tart. Az előjel pedig + behelyettesítéssel láthatjuk

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=+\infty$$

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=?$ határozott alakú $\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x-10}{x^2-x-2}=\frac{-10}{-2}=5$$

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+3)}{x(x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{(x+3)}{(x-1)}=-3$$

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+3)^2-9}{x}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+3)^2-9}{x}=\lim_{x\to0}\frac{((x+3)-3)((x+3)-3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x((x+3)+3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{((x+3)+3)}{1}=6$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=?\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-10}{x^2-x-2}=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$határozatlan alakú

A leggyorsabban ∞-hez tartóval x^2 el osztva a számlálót és a nevezőt

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-10}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$ már határozott $\left(\dfrac{0}{\infty}\right)=0$ alakú, azaz $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-10}{x^2-x-2}=0$

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

A $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ságát úgy meg lehet szüntetni, hogy mind a számláló, mind a nevező konjugáltjával szorozzuk a számlálót is és a nevezőt is:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+x-\left(1+x^2\right)\right)}{1+x-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x-x^2}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(1-x)}{1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{2}{2}$$

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(x+1+\frac{1-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=\lim_{x\to1}\left(x+1+\frac{-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}=?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$határozatlan alakú

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot5=5$, mert $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$,

(precízen $a=5x$ helyettesítéssel ha $x\to0$ akkor $a\to0$ és $\lim\limits_{a\to0}\dfrac{\sin a}{a}=1$)

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 5x}{x}$ =? Korlátos függvény szorozva 0-hoz tartó függvénnyel 0-hoz tart!

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sin 5x\cdot\frac{1}{x}\right)=0$$

(precízen rendőrelvvel $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin 5x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ mivel mindkét oldal 0-hoz tart

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg10x} = ?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg10x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg10x}\cdot\frac{10x}{5x}\cdot\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{10x}{\sin 10x}\cdot\frac{\cos 10x}{2} = \frac{1}{2}$$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = ? = ?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = ?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

A 16. példa eredményét felhasználva

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0} x = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3} = ? = ?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x = ?$ $\left(1^\infty\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\right)^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{e}$$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{1+x}\right)^x = ?$ Az alap tart 2-höz a kitevő pedig ∞-hez, ez nem határozatlan alakú, ez tart végtelenhez $\left(C^\infty\right)$ ahol C>1,

precízen: ha $\left(\dfrac{2x+1}{1+x}\right)\to 2$, akkor ha x elég nagy, akkor $\left(\dfrac{2x+1}{1+x}\right)>1{,}9$ így

$$(1,9)^x < \left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x \text{ és } \lim_{x\to\infty}(1,9)^x = +\infty \text{, tehát } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x = \infty$$

21. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+3x}\right)^x = ?$ Az alap $\frac{2}{3}$ -hoz, egynél kisebb számhoz tart, a kitevő pedig ∞-hez, ez nem határozatlan alak, hanem ez mindig 0-hoz tart (határozott alakok táblázata 6. sor)

precízen rendőr elvvel: $0 < \left(\frac{2x}{1+3x}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^x$ és $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$

22. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}} = ?$ $\left(1^\infty\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x \cdot \left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3+x}{x}}{\frac{1+x}{x}}\right)^x = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^x} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e} = e^2$$, valamint

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$ rendőrelvvel

$$(7)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < \left(\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} < (8)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$ mivel $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x = e^2$ a feladat első része alapján és $e^2 \approx 7,3441$ és $\lim_{x\to\infty}(7)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}(8)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$, ezért a középső is 1-hez tart..

Tehát $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}} = e^2 \cdot 1 = e^2$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(100x+50)-\ln 50}{2x} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(100x+50)-\ln 50}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\ln(2x+1) = \lim_{x\to 0}\ln(2x+1)^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{2x}}\right] = \ln(e) = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{2x}}=e$ precízen $\frac{1}{2x}=a$ helyettesítéssel $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}=e$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{16+x}-4}\,\frac{\sqrt{16+x}+4}{\sqrt{16+x}+4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{\left(\sqrt{16+x}\right)^2-16}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{16+x-16}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{16+x}+4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x}+4}{1}=8=$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, tehát a szorzat határértéke 8.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}=?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=1\cdot 0=0$$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakú

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x}\right)\frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4-x\right)}{\left(x^2+\sqrt{x}\right)}=\infty$$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)}{1}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\left(x^2+2\right)\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-2)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=0$$

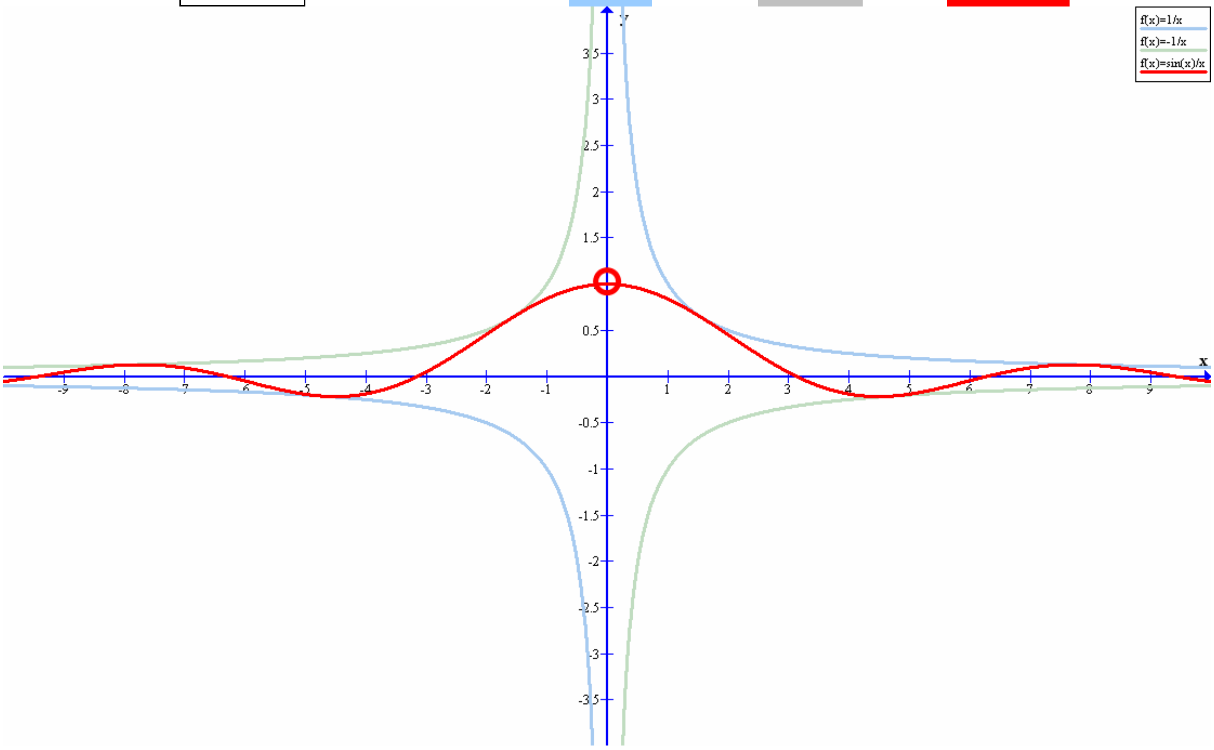
29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{thx}{x}=?$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{thx}{x}=0$, mert $|thx|<1$ és $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 2. táblázat 10. sor,

Függvények ábrázolása a „kritikus” helyeken vett határértékek segítségével

Kritikus helynek nevezzük a $\pm\infty$ -t valamint azokat a helyeket ahol valamelyik függvény nevezője nulla.

Ábrázoljuk a $\boxed{y=\frac{\sin x}{x}}$ függvényt

$y=\frac{1}{x}$ $y=-\frac{1}{x}$ $y=\frac{\sin x}{x}$



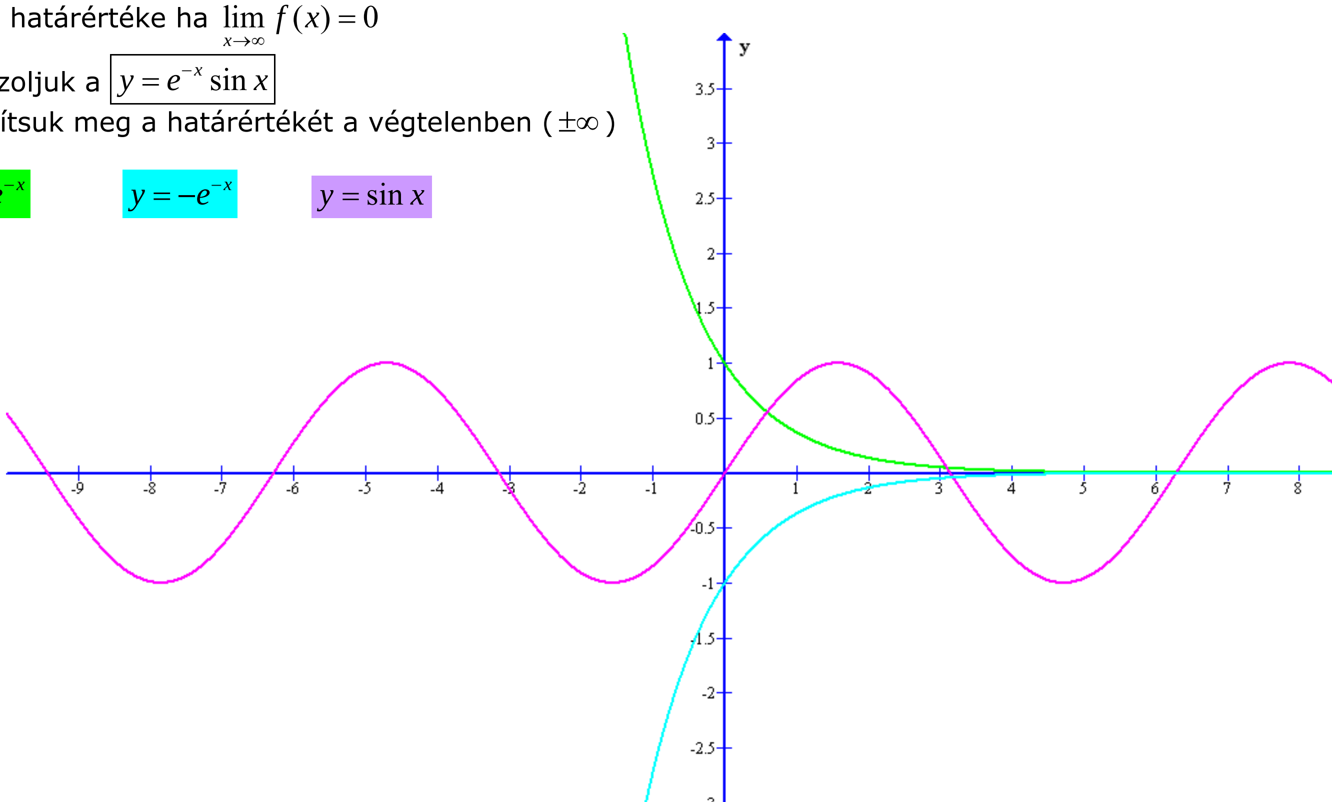
Vegyük észre, hogy ha az $y=f(x)$ függvényt megszorozzuk az $y=\sin x$ -el, akkor ahol a szinusz függvény nulla volt ott a szorzat függvény is nulla, ahol a szinusz függvény 1 értéket vett fel ott a szorzat függvény $f(x)$ értékét veszi fel, ahol pedig a szinusz függvény -1 értéket vett fel ott a szorzat függvény - $f(x)$ értékét veszi fel. Ezért a szorzat függvény az $f(x)$ és a - $f(x)$ görbéje között „hullámzik”

Ebből következik, hogy az $f(x)\cdot\sin x$ függvénynek a végtelenben akkor és csak akkor lehet határértéke ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

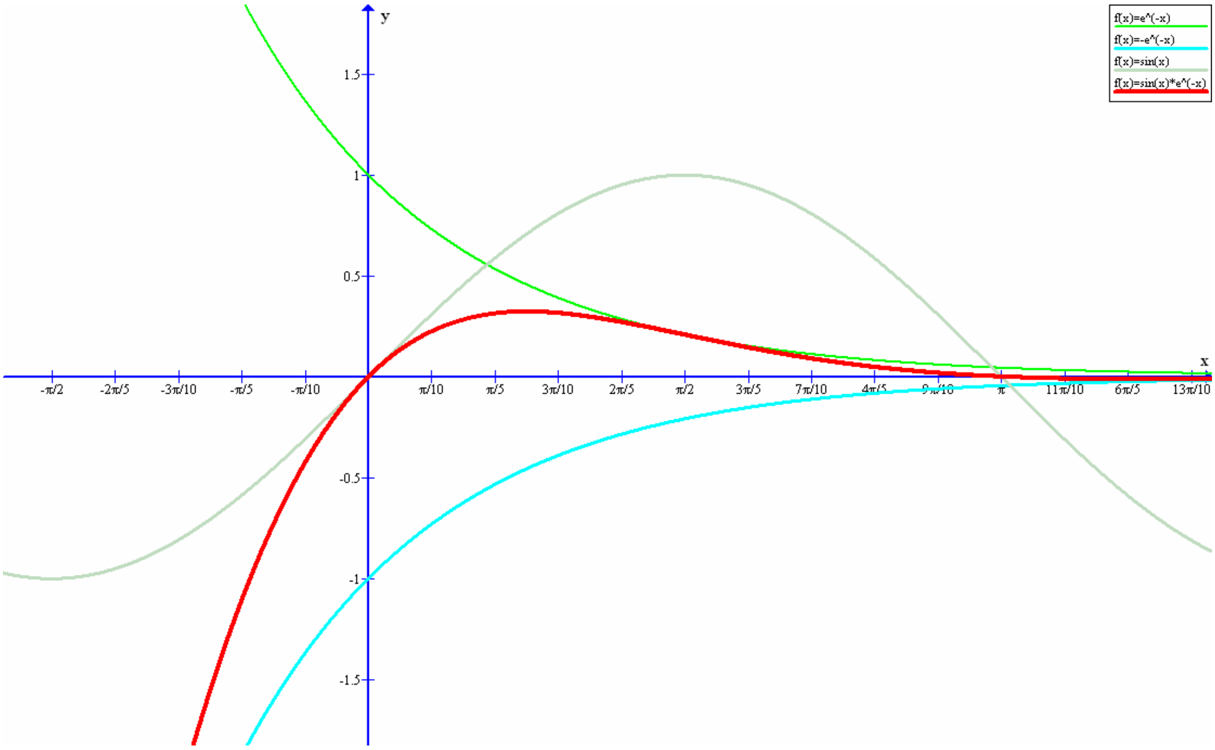
Ábrázoljuk a $\boxed{y=e^{-x}\sin x}$

Állapítsuk meg a határértékét a végtelenben ($\pm\infty$)

$y=e^{-x}$ $y=-e^{-x}$ $y=\sin x$

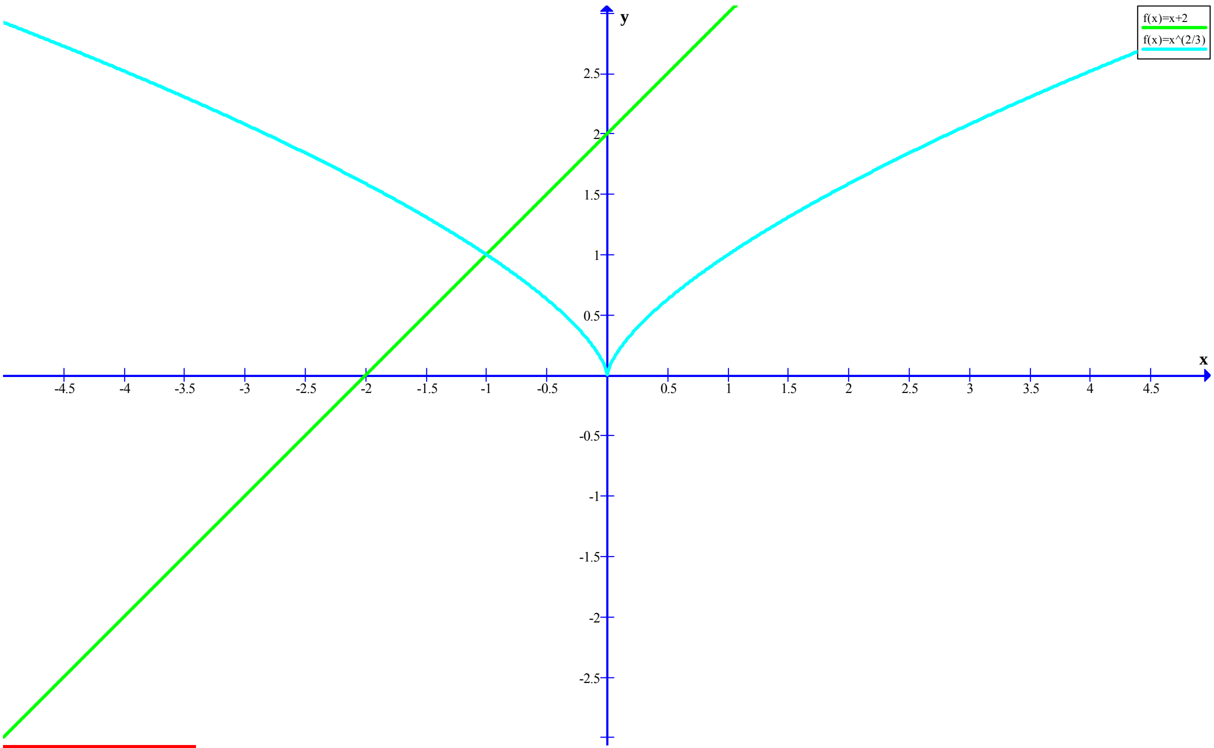


$y = e^{-x}$ $y = -e^{-x}$ $y = \sin x$ $y = e^{-x} \sin x$

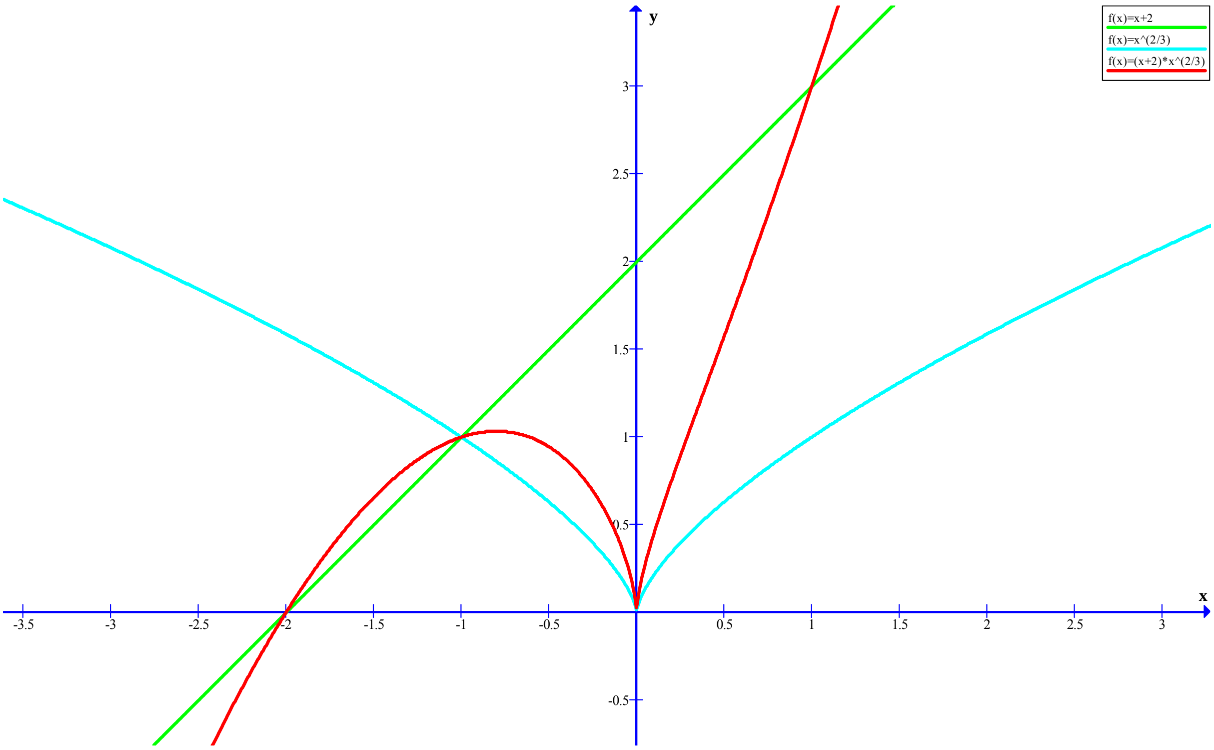


Ábrázoljuk az $y = (x+2) \cdot x^{\frac{2}{3}}$ függvényt (ezt a függvényt később, mikor már tudunk deriválni, meg fogjuk részletesen vizsgálni)

$y = x^{\frac{2}{3}}$ $y = (x+2) \cdot$



$$y = (x+2) \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

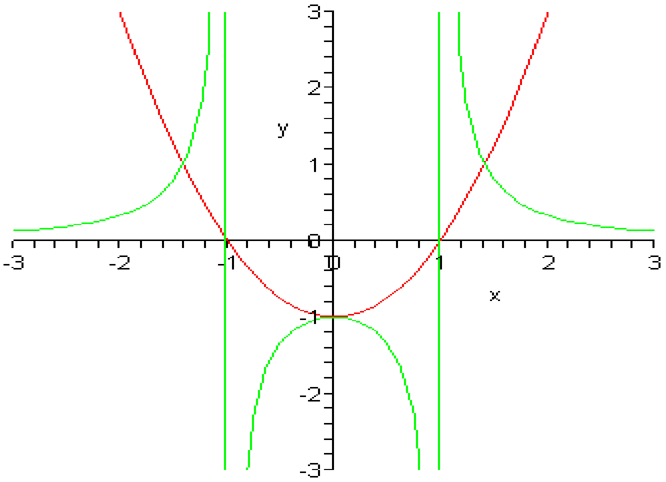


Reciprokfüggvények ábrázolása, határértékek a „kritikus" helyeken

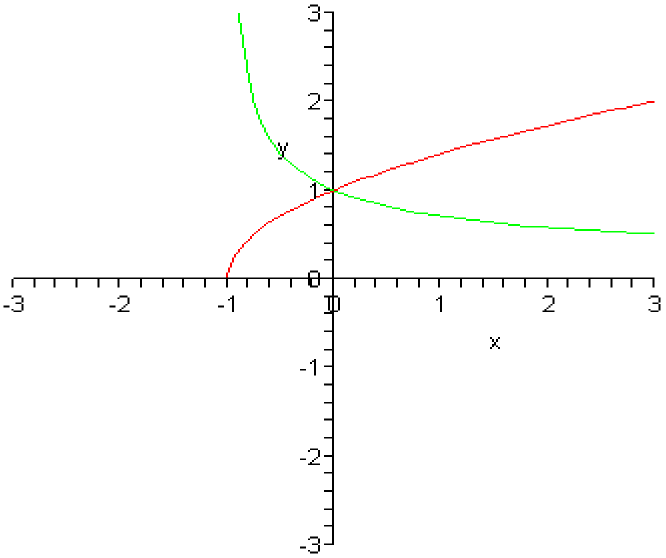
Kritikus helynek nevezzük a $\pm\infty$-t valamint azokat a helyeket ahol a nevező nulla.

Vegyük észre, hogy ha az $y=\frac{1}{f(x)}$ függvény görbéje úgy keletkezik az $f(x)$ görbéjéből, hogy ahol $f(x)$ az 1 értéket vett fel ott a reciproka is az 1 értéket veszi fel, ahol $f(x)$ a -1 értéket vette fel ott a reciproka is a -1 értéket veszi fel, ahol $f(x)=0$ értékét vette fel, ott a reciprokának végtelen a határértéke ($+\infty$ vagy $-\infty$,függően attól, hogy pozitív vagy negatív értékeken keresztül vette fel a 0 értéket. Ahol pedig a függvénynek $+\infty$ vagy $-\infty$ volt a határértéke, ott a reciprokának 0 a határértéke.

$f(x)=x^2-1$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$



$f(x)=\sqrt{x+1}$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$



Racionális törtfüggvények
Definíció

Két polinom hányadosát racionális törtfüggvénynek nevezzük, jelben: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Racionális törtfüggvények ábrázolása, határértékek a „kritikus" helyeken
„Kritikus" helynek nevezzük a $\pm\infty$-t valamint azokat a helyeket ahol a nevező nulla.

Vegyük észre, hogy ahol a racionális törtfüggvény nevezője nulla, és a számlálója nem nulla, ott a függvénynek ∞ a határértéke (szimbolikusan $\dfrac{c}{0}=\infty$). Ahol a nevező is és a számláló is nulla, ott ki kell számolni a határértékét (szimbolikusan $\dfrac{0}{0}$ határozatlan alak)
A végtelenben vett határértékét az dönti el, hogy a számláló foka nagyobb-e mint a nevező foka, vagy fordítva, vagy egyenlő.
Ha $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ esetén ha $n>m$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\infty$,

ha $m>n$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0$,

ha $n>m$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=C$, ahol C a két polinomok legmagasabb fokú tagja együtthatóinak hányadosa.

Példa:
Ábrázoljuk és állapítsuk meg a határértékeket a „kritikus" helyeken ha

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{x\left(x^2-4\right)\left(x-4\right)}{\left(x^2-9\right)(x-2)}=\frac{x^4-4x^3-4x^2+16x}{x^3-2x^2-9x+18} \qquad \text{n=4 és m=3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-4x^3-4x^2+16x}{x^3-2x^2-9x+18}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4-\frac{4}{x}+\frac{16}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{18}{x^3}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-4x^3-4x^2+16x}{x^3-2x^2-9x+18}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-4-\frac{4}{x}+\frac{16}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{18}{x^3}}=-\infty$$

Nézzük meg, hogy ahol a nevező =0, azaz x=3, x=-3, és x=2 helyeken, , van-e határértéke

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\left(x^2-4\right)\left(x-4\right)}{\left(x^2-9\right)(x-2)}=?$ Ha $x\to3$ akkor a számláló tart -15 höz (behelyettesítjük a számlálóba az x=3 értéket), a nevező pedig tart nullához. Szimbolikusan: $\left(\dfrac{C}{0}\right)$.

Ez nem határozatlan alak, ez mindig ∞. A kérdés csak az, hogy $+\infty$ vagy $-\infty$.

Ha az x=3 helyhez közelítünk jobbról, azaz 3-nál nagyobb értékeket helyettesítünk a törtbe, akkor a kapott tört értéke negatív, egyre kisebb szám, azaz

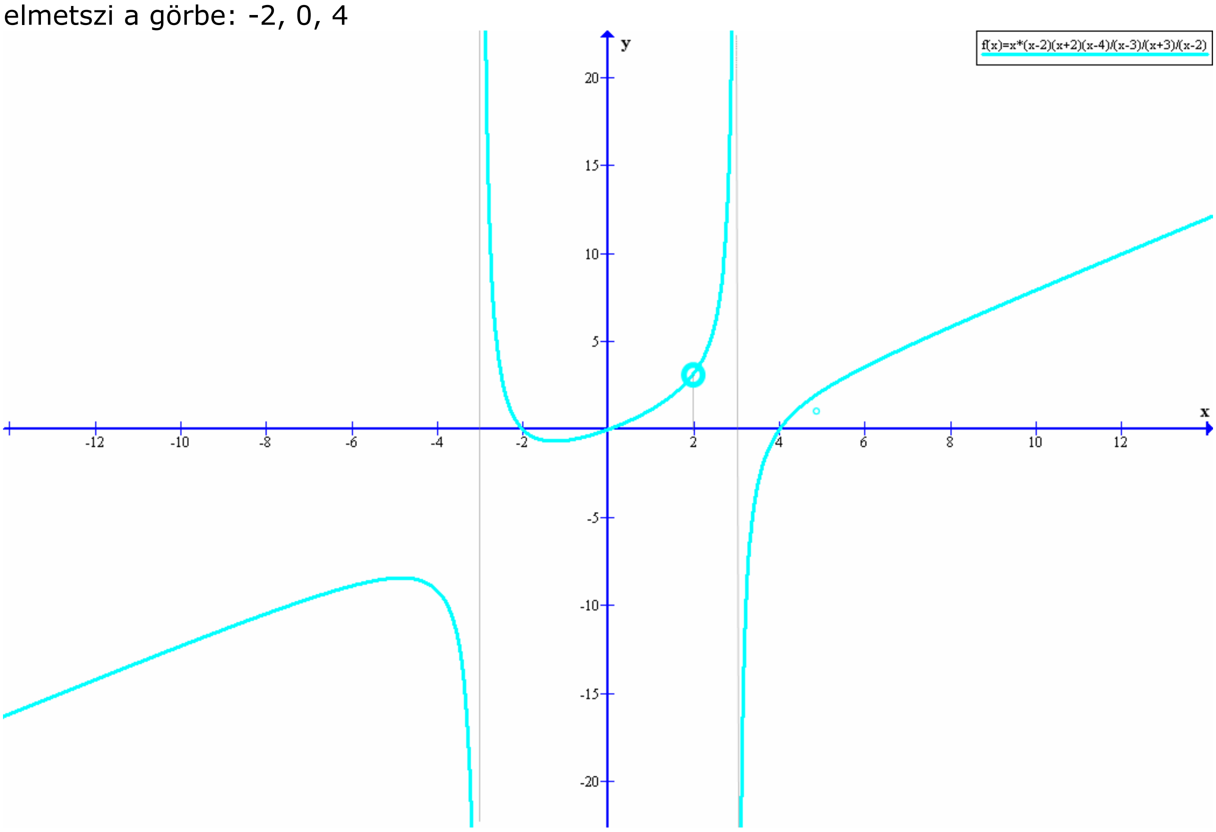
$$\lim_{x\to 3+}\frac{x\left(x^2-4\right)(x-4)}{\left(x^2-9\right)(x-2)}=-\infty$$

Ha az x=3 helyhez közelítünk balról, azaz 3-nál kisebb értékeket helyettesítünk a törtbe, akkor a kapott tört értéke pozitív, egyre nagyobb szám, azaz $\lim_{x\to 3-}\frac{x\left(x^2-4\right)(x-4)}{\left(x^2-9\right)(x-2)}=+\infty$

A x=2 ben mind a számláló mind a nevező nulla.

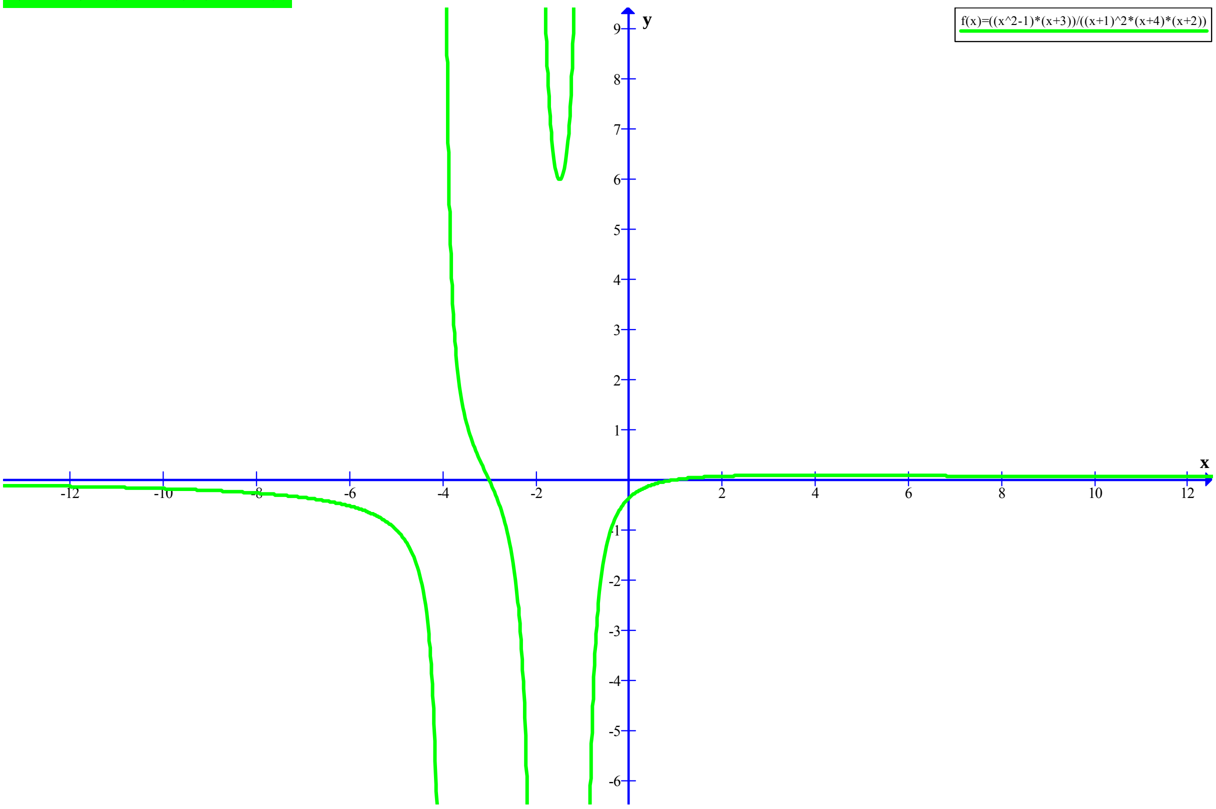
$$\lim_{x\to 2}\frac{x\left(x^2-4\right)(x-4)}{\left(x^2-9\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x+2)(x-4)}{\left(x^2-9\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+2)(x-4)}{\left(x^2-9\right)}=\frac{2\cdot 4\cdot(-2)}{-5}=\frac{16}{5}$$

Azaz itt véges határértéke van függvénynek. Továbbá a zérushelyek, ahol az x-tengelyt elmetszi a görbe: -2, 0, 4



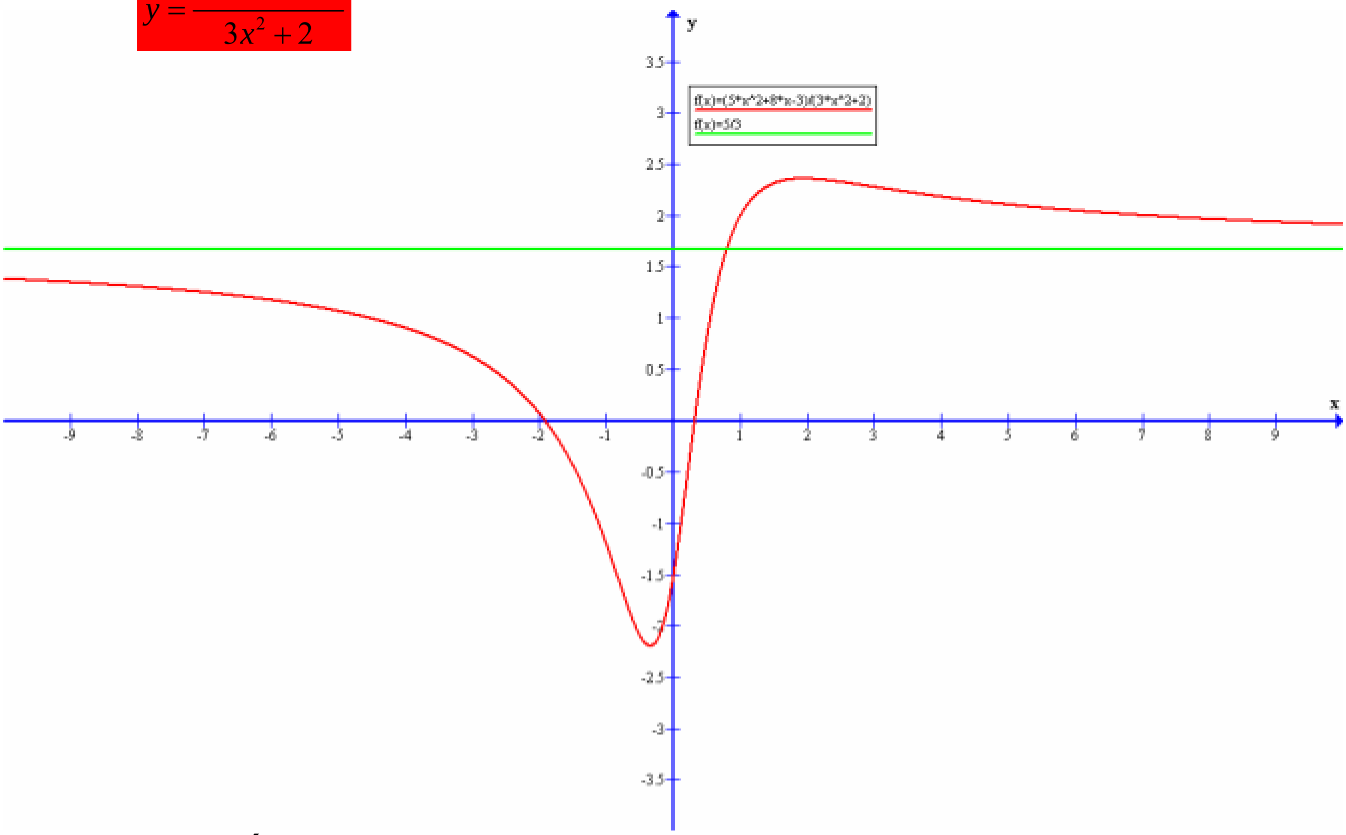
Állapítsuk meg a „kritikus” helyeken a határértékét a következő függvényeknek:

$$\frac{\left(x^2-1\right)\left(x+3\right)}{\left(x+1\right)^2\left(x+4\right)\left(x+2\right)}$$



Megoldás:

$$y = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$



Megoldás:

Összetett függvények ábrázolás a határértékek alapján

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{e}\right)^{-1}=e$$

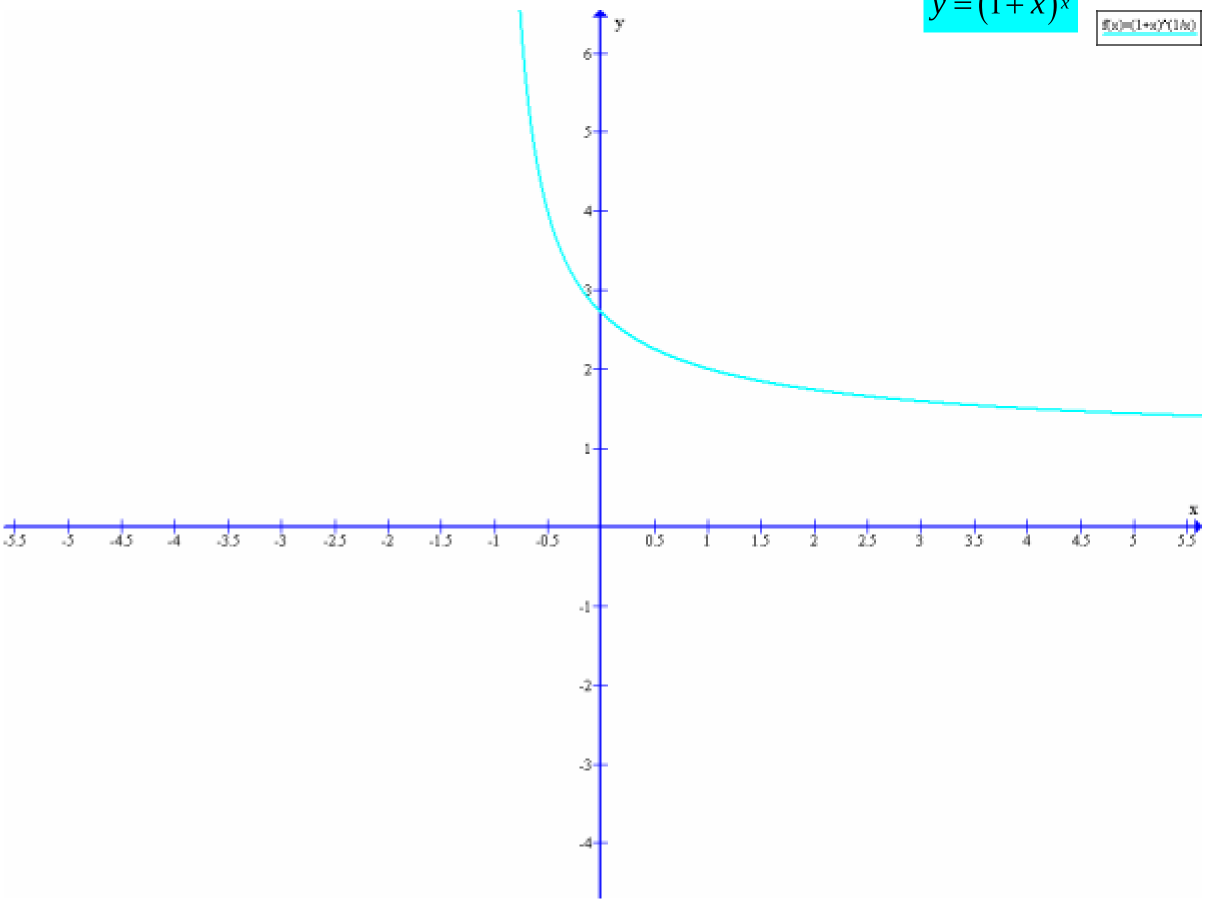
Az $x=0$ helyen balról a határértéke:

$\lim_{x\to0+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}(1+y)^{\frac{1}{y}}$. Tekintve, hogy $\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=\frac{1}{y}\ln(1+y)$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{y}\ln(1+y)=1$
Ezt később mutatjuk meg.
Jobbról közelítve a 0-hoz nincs értelmezve a függvény, hiszen x<-1 vagy x>0

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e$$

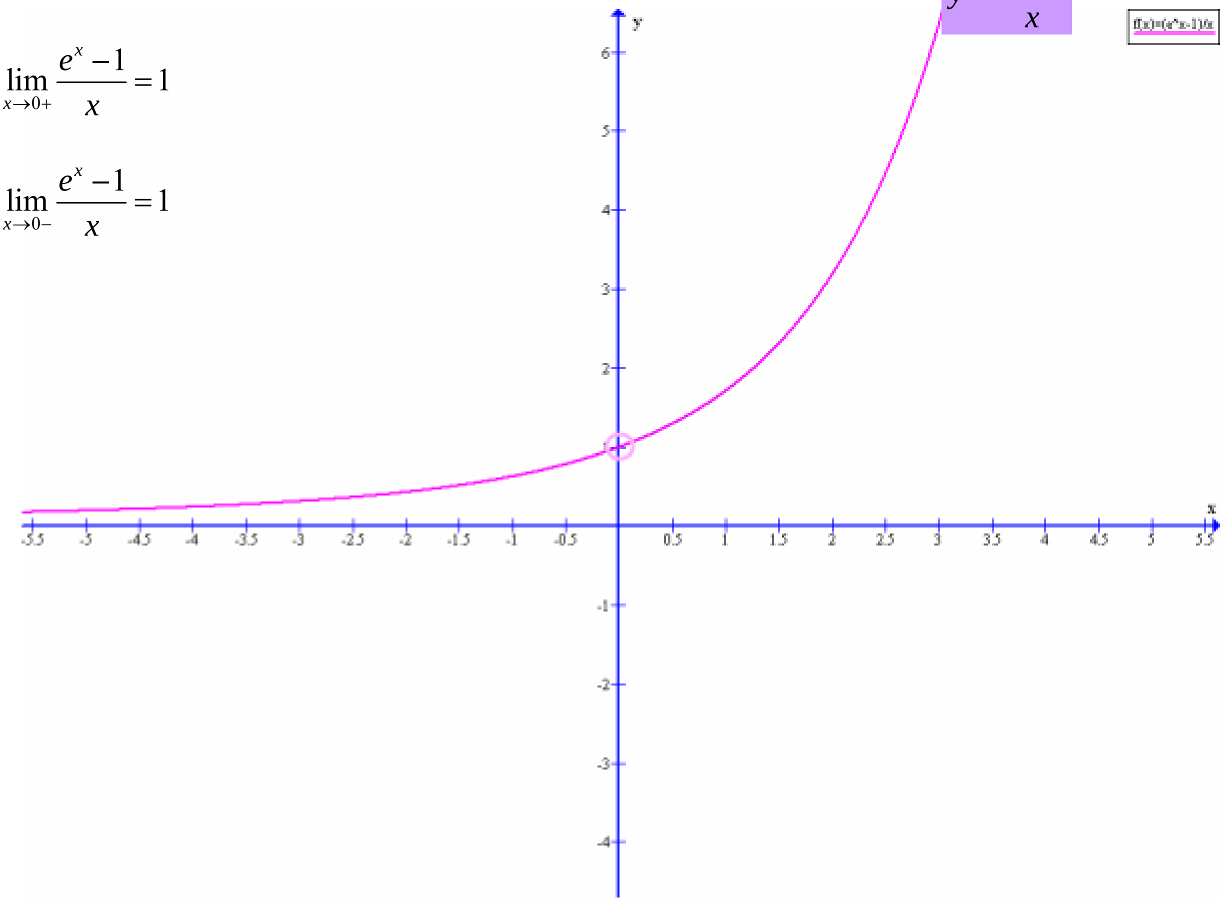
$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$



$$y=\frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^x-1}{x}=1$$



$$y=5-\frac{10x}{x^2+1}$$