Építészkari Matematika 1.
2010. október 22.
1.Zh
D csoport

1. Legyen $\varepsilon = 10^{-2}$. Határozzuk meg az ehhez tartozó küszöbszámot, melyre igaz, hogy ennél nagyobb n-ekre az $a_n = \frac{n-5}{n+3}$ eltérése az 1-től ε-nál kisebb lesz!

Megoldás:

$a_1 = \frac{-4}{4} = -1$, $a_2 = \frac{-3}{5} = -17$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{9}$,...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+-5}{n+3} = 1$$

$\left|\frac{n-5}{n+3} - 1\right| < 0,01$ $\quad$ $\left|\frac{n-5-(n+3)}{n+3}\right| < 0,01$ $\quad$ $\left|\frac{-8}{n+3}\right| < 0,01$

$\frac{8}{n+3} < 0,01$ $\quad$ $\frac{8}{n+3} < \frac{1}{100}$ $\quad$ $800 < n+3$ $\quad$ $797 < n$, tehát n_0 =797

2. Vizsgáljuk monotonitás szempontjából az

$a_n = \frac{1-3n}{2n+1}$ sorozatot!

Megoldás:

Megvizsgáljuk, hogy $\frac{1-3n}{2n+1} > \frac{1-3(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{-3n-2}{2n+3}$ igaz-e!

$\frac{1-3n}{2n+1} > \frac{-3n-2}{2n+3}$ $\quad$ $(1-3n)\cdot(2n+3) > -(2n+1)(3n+2)$

$(-6n^2 - 7n + 3) > -(6n^2 + 7n + 2)$, mindkét oldalt megszorozva -1 el az egyenlőtlenség megfordul, tehát

$(6n^2 + 7n - 3) < (6n^2 + 7n + 2)$ $\quad$ $-3 < 2$, tehát az eredeti feltétel igaz, tehát a sorozat szigorúan monoton csökken.

3. Számítsuk ki:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-2x}{3-2x}\right)^{x-10}.$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-2x}{3-2x}\right)^{x-10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2-2x}{3-2x}\right)^{x}}{\left(\frac{2-2x}{3-2x}\right)^{10}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+2x}{3+2x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2+2x}{3+2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{\frac{2-2x}{2x}}{\frac{3-2x}{2x}}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{2-2x}{2x}\right)^{2x}}{\left(\frac{3-2x}{2x}\right)^{2x}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1-\frac{2}{2x}\right)^{2x}}{\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{2x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{e^{-2}}{e^{-3}}}=\sqrt{\frac{e^{3}}{e^{2}}}=\sqrt{e}$$

Tehát $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-2x}{3-2x}\right)^{x-10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2-2x}{3-2x}\right)^{x}}{\left(\frac{2-2x}{3-2x}\right)^{10}}=\frac{\sqrt{e}}{1}=\sqrt{e}$

4. Deriváljuk a következő függvényt:

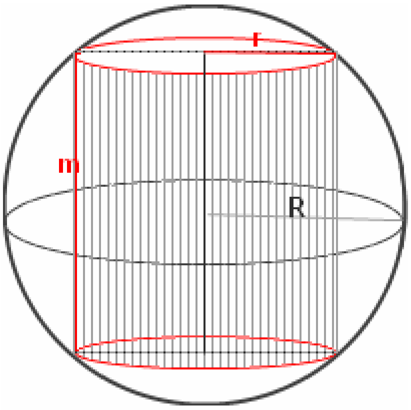
$$f(x)=tg\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right).$$

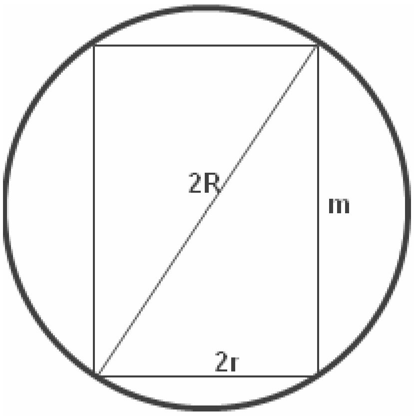
$$f'(x)=\frac{1}{\left(\cos\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)'=\frac{1}{\left(\cos\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^{2}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left[\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{\left(\cos\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^{2}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{-2}{(x-1)^{2}}$$

5. Határozzuk meg az R=15 cm sugarú gömbbe írható maximális térfogatú henger sugarát és magasságát!

Megoldás:
R=15 cm, legyen a henger magassága m, alapkörének sugara r.





A henger térfogata
$V = r^2\pi \cdot m$, keressük a térfogat függvény maximumát.

A két változó, m és r között a következő összefüggés van:
$(m)^2 + 4r^2 = 4R^2$, azaz

$m^2 + 4r^2 = 900$ $\qquad$ $m^2 + 4r^2 = 900$ $\qquad$ $4r^2 = 900 - m^2$, $\qquad$ $\boxed{r^2 = 225 - \frac{m^2}{4}}$

behelyettesítve a térfogat függvénybe r^2-et, $V = \pi\left(225 - \frac{m^2}{4}\right) \cdot m = \pi\left(225 \cdot m - \frac{m^3}{4}\right)$

ott lehet a szélsőértéke ahol a derivált, $V' = 0$
$V' = \pi\left(225 - \frac{3}{4}m^2\right) = 0$, $\qquad$ innen $\left(900 - 3m^2\right) = 0$, azaz $\frac{900}{3} = m^2$,
$\boxed{m = \frac{30}{\sqrt{3}}}$, és itt valóban van szélsőérték, mert ha a második derivált

$V'' = \pi\left(30 - \frac{3}{4}m^2\right)' = -\frac{3}{4}(2m) = -\frac{3}{2}m$, $\quad$ az $\quad m = \frac{30}{\sqrt{3}}$ $\quad$ helyen :
$V'' = -\frac{3}{4}\left(2\frac{30}{\sqrt{3}}\right) < 0$ $\qquad$ negatív, tehát maximuma van a V függvénynek.

És ez a térfogat

$$V = \left(225 - \frac{900}{12}\right)\pi \cdot \frac{30}{\sqrt{3}} = 225\pi\left(1 - \frac{4}{12}\right)\frac{30}{\sqrt{3}} = (15)^3\,\pi\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$\boxed{V = \frac{4}{3}(15)^3\,\pi\frac{1}{\sqrt{3}}}$ $\qquad$ A gömb térfogatának $\sqrt{3}$-ad része.