Alkalmazható képletek:

$\boxed{\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C}$ ha $\alpha \neq -1$ valós konstans

$\boxed{\int x^{-1}dx = \ln|x|+C}$ ha $\alpha = -1$,

$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C}$ ahol $F'(x)=f(x)$

$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C}$

$\boxed{\int (f(x))^{\alpha} f'(x)dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C}$

Newton-Leibniz formula a határozott integrál kiszámítására

$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)}$ ahol $F(x)$ a $f(x)$ függvény egyik primitív függvénye, vagyis $F'(x)=f(x)$

Feladatok:

1. $\int (x-3)^2 dx = \frac{(x-3)^3}{3}+C$

2. $\int (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot(2x-3)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^3}{3}+C$ vagy

   $\int (2x-3)^2 dx = \int (4x^2-12x+9)dx = 4\frac{x^3}{3}-12\frac{x^2}{2}+9x+C$

3. $\int \frac{2}{x+5}dx = 2\int \frac{1}{x+5}dx = 2\ln|x+5|+C$

4. $\int \frac{1}{x^2+4x-5}dx = ?$

Racionális valódi törtfüggvény, melynek a nevezője elsőfokú tényezőkre bontható,

$\int \frac{1}{x^2+4x-5}dx = \int \frac{1}{(x+5)(x-1)}dx$

Parciális törtekre bontva

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)} = \frac{A}{(x+5)}+\frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+5)}{(x+5)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx+5B}{(x+5)(x-1)} = \frac{(A+B)x+5B-A}{(x+5)(x-1)}$$

$\frac{(A+B)x+5B-A}{(x+5)(x-1)} \equiv \frac{1}{(x+5)(x-1)}$, ebből következik, hogy $A+B=0$ és $5B-A=1$

kifejezve: $6B=1$, $B=\frac{1}{6}$, $A=-\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+5)}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x+5)(x-1)}dx = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+5)}\right)dx = \frac{1}{6}\left(\ln|x-1| - \ln|x+5|\right)+C$$

5. $\int \frac{2x+1}{2x+5}dx = ?$

Racionális áltörtfüggvény, tehát fel kell bontani egy egészfüggvény és egy valódi törtfüggvény összegére polinom-osztással vagy a számlálóban előállítjuk a nevezőt ügyeskedéssel

$$\int \frac{2x+1}{2x+5}dx = \int \frac{2x+5-4}{2x+5}dx = \int\left(1-\frac{4}{2x+5}\right)dx = \int 1\cdot dx - \int \frac{4}{2x+5}dx = \int 1\cdot dx - 2\int \frac{2}{2x+5}dx = x+2\ln|2x+5|+C$$

6. $\int \frac{x^2}{x+1}dx = ?$

Racionális áltörtfüggvény, tehát fel kell bontani egy egészfüggvény és egy valódi törtfüggvény összegére polinom-osztással vagy ügyeskedéssel:

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \frac{x^2-1+1}{x+1}dx = \int \frac{x^2-1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx = \int (x-1)dx + \int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$$

7. $\int \frac{3}{2x+5}dx = ?$

$$\int \frac{3}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\ln|2x+5|+C$$

8. $\int \frac{3x+10}{2x+5}dx = ?$

Racionális áltörtfüggvény, tehát fel kell bontani egy egészfüggvény és egy valódi törtfüggvény összegére polinom-osztással vagy a számlálóban előállítjuk a nevezőt

$$\int \frac{3x+10}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{20}{3}}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+5-5+\frac{20}{3}}{2x+5}dx = \frac{3}{2}\left(\int \frac{2x+5}{2x+5} + \frac{-5+\frac{20}{3}}{2x+5}\right)dx = \frac{3}{2}\left(\int 1+\frac{\frac{5}{3}}{2x+5}\right)dx = \frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\int \frac{1}{2x+5}dx =$$

$$= \frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\int \frac{1}{2x+5}dx = \frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\ln|2x+5|+C$$

Felbonthatatlan másodfokú nevezőjű racionális törtfüggvények

Az olyan $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ alakú feladatokban ahol a nevezőben lévő másodfokú polinomnak nincs valós gyökeke, érdemes a nevezőben lévő kifejezést teljes négyzetté alakítani és $\int \frac{1}{(dx+e)^2+1}dx$ formára hozni.

Ekkor fel lehet használni, hogy $\boxed{\operatorname{arc}'tg(dx+e) = \frac{1}{1+(dx+e)^2}(d)}$ mint a következő feladatban:

9. $\int \frac{3}{2x^2+5}dx = ?$

$$\int \frac{3}{2x^2+5}dx = 3\int \frac{1}{2x^2+5}dx = \frac{3}{5}\int \frac{1}{\frac{2}{5}x^2+1}dx = \frac{3}{5}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1}dx = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\int \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1}dx = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+C$$

10. $\int \frac{3x}{2x^2+5}dx = 3\int \frac{x}{2x^2+5}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2+5}dx = \frac{3}{4}\ln\left(2x^2+5\right)+C$

11. $\int \frac{3x+10}{2x^2+5}dx = \int \frac{3x}{2x^2+5}dx + \int \frac{10}{2x^2+5}dx$, az első tag olyan mint a 9., a második pedig mint a 10. feladat

12. $\int \frac{3x^2}{2x+5}dx$ =? E feladatban átalakítjuk a racionális tört függvényt egy egész polinom és egy valódi törtfüggvény összegére. Ez megoldható ügyes átalakítással vagy polinom osztással:

$$\int \frac{3x^2}{2x+5}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x^2+20x-20x+25-25}{2x+5}dx = \frac{3}{4}\int \frac{(2x+5)^2-20x-25}{2x+5}dx = \frac{3}{4}\int\left((2x+5)+\frac{-20x-25}{2x+5}\right)dx$$

$$= \frac{3}{4}\int(2x+5)\,dx - \frac{3}{4}\int \frac{20x+25}{2x+5}dx = \frac{3}{4}\int(2x+5)\,dx - \frac{15}{2}\int \frac{\left(2x+5-5+\frac{5}{2}\right)}{2x+5}dx = \frac{3}{4}\int(2x+5)\,dx - \frac{15}{2}\int\left(1-\frac{\frac{5}{2}}{(2x+5)}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int(2x+5)\,dx - \frac{15}{2}\int\left(1-\frac{\frac{5}{2}}{(2x+5)}\right)dx = \frac{3}{4}\left(x^2+5x\right) - \frac{15}{2}\left(x-\frac{5}{4}\ln|2x+5|\right)+C$$

Javította: Borsai Szandra

13. $\int \frac{3x^2}{2x^2+5}dx = 3\int \frac{x^2}{2x^2+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x^2}{2x^2+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x^2+5-5}{2x^2+5}dx = \frac{3}{2}\int\left(1+\frac{-5}{2x^2+5}\right)dx$ innen olyan mint a 9. feladat

14. $\int x^2\left(x^2-1\right)dx = \int\left(x^4-x^2\right)dx = \frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+C$ 3.

15. $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{x}+C$

16. $\int \frac{\sqrt{x}-x+x^4}{x^2}dx = \int\left(x^{-\frac{3}{2}}-x^{-1}+x^2\right)dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|x| + \frac{x^3}{3}+C$

17. $\int \frac{(x+1)\left(x^2-3\right)}{3x^2}dx = \int \frac{x^3-3x+x^2-3}{3x^2}dx = \int\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{6}-\ln|x|+\frac{1}{3}x+\frac{1}{x}+C$ elvégezve

18. $\int \frac{x^2+x-6}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}dx = \int(x+3)dx = \frac{x^2}{2}+3x+C$

19.. $\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}dx$ = ? Sajnos a számláló nem osztható $(x-2)$ -vel ezért tagonként véve:

$$\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x-2}-\frac{4x}{x-2}+\frac{7}{x-2}\right)dx = \int \frac{x^2}{x-2}dx - \int \frac{4x}{x-2}dx + \int \frac{7}{x-2}dx =$$

$$=\int \frac{x^2-4+4}{x-2}dx-4\int \frac{x-2+2}{x-2}dx+7\int \frac{1}{x-2}dx=\int \frac{(x-2)(x+2)+4}{x-2}dx-4\int\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx+7\int \frac{1}{x-2}dx=$$

$$=\int\left((x+2)+\frac{4}{x-2}\right)dx-4\int\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx+7\int \frac{1}{x-2}dx=\frac{x^2}{2}+2x+4\ln|x-2|-4\left(x+2\ln|x-2|\right)+7\ln|x-2|+C$$

20. $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{3^x}\right)dx=\ln|x|+\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{1}{\ln\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^x+C=\ln|x|-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{3^x}+C=$

21. $\int\left(3^x-x^{-4}+\sin 5x\right)dx=\frac{1}{\ln 3}3^x-\frac{x^{-3}}{-3}-\frac{1}{5}\cos 5x+C$

22. $\int\left(4^x-x^{-3}+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{\ln 4}4^x-\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{1}{2}\sin 2x+C=$

23.. $\int_1^8 \frac{2+8x^2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}dx=?$ Először a határozatlan integrált kiszámítjuk, majd alkalmazzuk a Newton-Leibniz formulát

$$\int \frac{2+8x^2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}\right)dx=\frac{2}{3}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+\frac{8}{3}\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+C=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{8}{3}}+C$$

$$\int_1^8 \frac{2+8x^2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}dx=\left[x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{8}{3}}\right]_1^8=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2+\left(\sqrt[3]{8}\right)^8-\left(\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1}\right)^8\right)=4+256-2=258$$