

Sorozat alapfeladatok

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{8n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^8 = \left((e)^{-1}\right)^8 = \frac{1}{e^8}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{8n}\right)^{8n} = e$ mert ez a 6. sorozat egy részsorozata, mely ezért a sorozat határértékéhez, azaz e -hez tart

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 3}{n^3 + 2}\right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{n^3 - 3}{n^3}\right)^{n^3}}{\left(\frac{n^3 + 2}{n^3}\right)^{n^3}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{n^3}\right)^{n^3}}{\left(1 + \frac{2}{n^3}\right)^{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n^3}\right)^{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^3}\right)^{n^3}} = \frac{e^{-3}}{e^2} = \frac{1}{e^5}$$

$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n = e^A \text{ alapján}\right)$

3. Vizsgálja meg monotonitását, korlátosság szempontjából a következő sorozatot! Konvergens-e? Ha igen, adjon meg az n_0 küszöböt, ha $\varepsilon = 10^{-2}$!

$$a_n = \frac{2n - 3}{3 - 5n}$$

Megoldás:

$$a_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}, \quad a_3 = \frac{3}{-12} = -\frac{1}{4}$$

Megvizsgáljuk, hogy $\frac{2n-3}{3-5n} > \frac{2(n+1)-3}{3-5(n+1)}$ igaz-e!

$$\frac{2n-3}{5n-3} > \frac{2(n+1)-3}{5(n+1)-3}, \quad \frac{2n-3}{5n-3} > \frac{2n-1}{5n+2}, \quad 5n-3 > 0, \text{ ha } n > \frac{3}{5}, \text{ és}$$

$5n+2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^+$ alapján átalakítva az egyenlőtlenséget

$$(2n-3) \cdot (5n+2) > (2n-1) \cdot (5n-3)$$

$$10n^2 + 4n - 15n - 6 > 10n^2 + 3 - 5n - 6n, \text{ innen}$$

$$-11n - 6 < 3 - 11n$$

$6 > -3$ ami igaz, tehát a sorozat szigorúan monoton csökken

Felső korlát például : $K_1 = \frac{1}{2}$

Alsó korlát például : $K_2 = -1$

A legnagyobb alsó korlát $K = -\frac{2}{5}$

$$\frac{2n-3}{3-5n} > -\frac{2}{5}$$

$$10n - 15 < 6 + 10n$$

$$-15 < 6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3-5n} = -\frac{2}{5}$$

$$\left| \frac{2n-3}{3-5n} - \left(-\frac{2}{5} \right) \right| < 0,01$$

$$\left| \frac{2n-3}{3-5n} + \frac{2}{5} \right| < 0,01 \quad \left| \frac{10n-15+6-10n}{5(3-5n)} \right| < 0,01$$

$$\left| \frac{-9}{15-25n} \right| < 0,01, \text{ az abszolút értékben levő tört számlálója és nevezője is negatív,}$$

tehát a tört pozitív

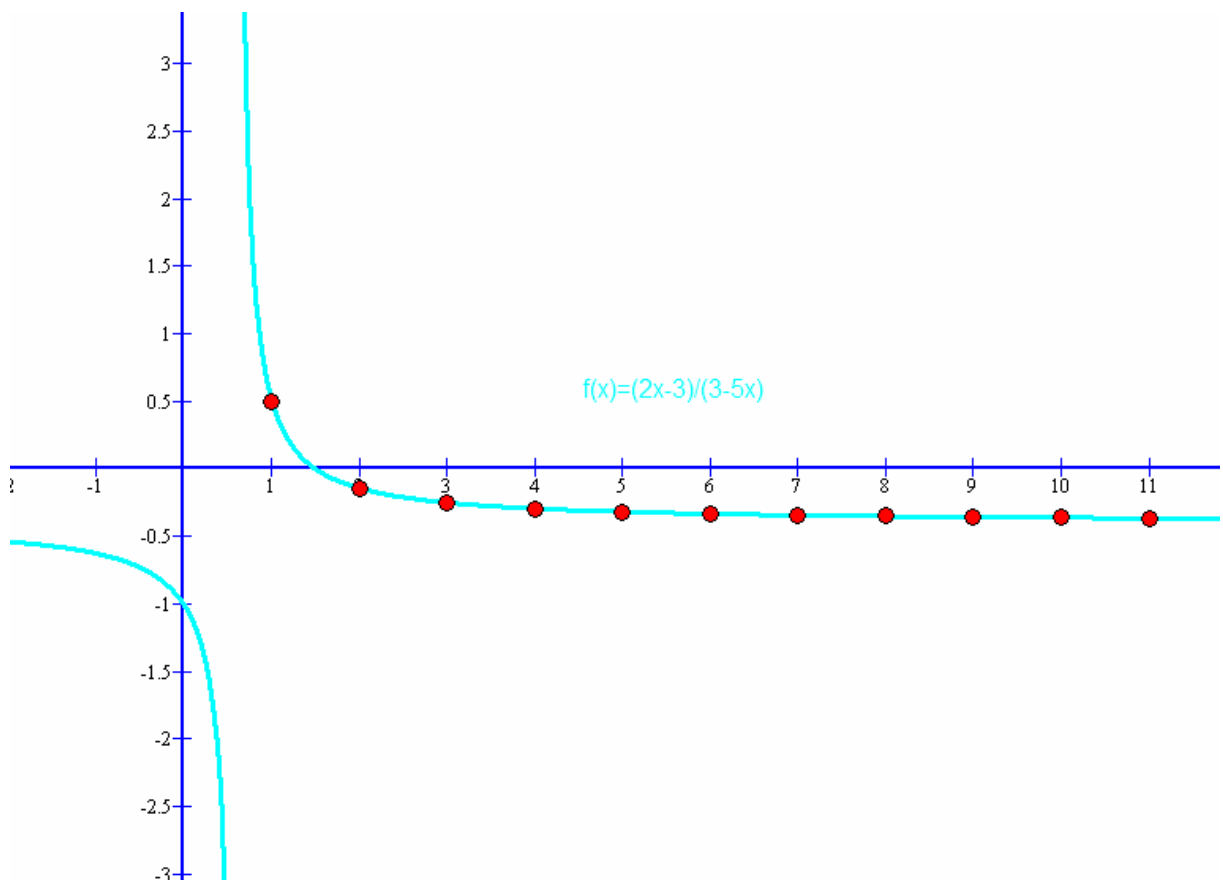
$$\frac{-9}{15-25n} < 0,01$$

$$-9 > 0,15 - 0,25n$$

$$0,25n > 9,15$$

$$n > \frac{9,15}{0,25}$$

$$n > 36,6 \quad n_0 = 36.$$



4. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, adja meg a határértéküket!

$$b_n = \sqrt{4n^2 + 4n + 1} - \sqrt{4n^2 - 3n - 2}$$

$$c_n = \frac{3^{n+2} \cdot 2^{n-3} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 6^{n-1} + 9}$$

$$d_n = \left(\frac{2n+7}{3-2n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$b_n = \left(\sqrt{4n^2 + 4n + 1} - \sqrt{4n^2 - 3n - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 + 4n + 1} + \sqrt{4n^2 - 3n - 2}}{\sqrt{4n^2 + 4n + 1} + \sqrt{4n^2 - 3n - 2}} =$$

$$= \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 3n + 2}{\sqrt{4n^2 + 4n + 1} + \sqrt{4n^2 - 3n - 2}} = \frac{7 + \frac{3}{n}}{\sqrt{4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{4 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}} \rightarrow \frac{7}{4}$$

$$c_n = \frac{3^{n+2} \cdot 2^{n-3} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 6^{n-1} + 9} = \frac{9 \cdot 3^n \cdot \frac{2^n}{8} - 7 \cdot 5^n}{\frac{5}{6} \cdot 6^n + 9} = \frac{\frac{9}{8} - 7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{5}{6} + 9 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n} \rightarrow \frac{\frac{9}{8}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{8} \cdot \frac{6}{5} = \frac{27}{20}$$

$$d_n = \left(\frac{2n+7}{3-2n} \right)^{\frac{n}{2}} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{7}{2n}\right)^n}}{\sqrt{\left(-1 \cdot \left(1 - \frac{3}{2n}\right)\right)^n}} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{7}{2n}\right)^n}}{(-1)^n \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n}}$$

Ha n páros, a sorozat $\sqrt{\frac{e^{\frac{7}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt{e^5} = e^{\frac{5}{2}}$ határértékhez tart,

ha n páratlan $\sqrt{\frac{e^{\frac{7}{2}}}{-e^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt{-e^{-5}}$ nem létezik a határérték.

Tehát a sorozatnak nincs határértéke.

5. Legyen $a_n = \frac{2n-1}{5n+2}$.

Határozza meg azt a legkisebb N természetes számot, amelyre teljesül, hogy minden $n > N$ esetén az a_n eltérése az (a_n) sorozat határértékétől kisebb, mint $\varepsilon = 0,001$

2. Írja fel az alábbi végtelen sorozatok első néhány tagját. Vizsgálja meg, a sorozat korlátos-e, monoton-e, konvergens-e. Határozza meg a konvergens sorozatok határértékét.

$$\text{a.) } a_n = n^2 + (-1)^n n^2, \quad \text{b.) } a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

3. Konvergensek-e az alábbi számsorozatok? Ha igen, számítsa ki a határértéket:

$$\text{a.) } a_n = \frac{(3n-1)(n+2)}{(1-n)(2n+5)}, \quad \text{b.) } a_n = \frac{4^n}{3 \cdot 4^n + 2}, \quad \text{c.) } a_n = n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right),$$

$$\text{d.) } a_n = \frac{2+5+8+\dots+(3n-1)}{n}, \quad \text{e.) } a_n = \left(\frac{n-2}{n} \right)^{3n+1}, \quad \text{f.) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n.$$

$$\text{g.) } a_n = \frac{5^n}{n!}, \quad \text{h.) } a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}, \quad \text{i.) } a_n = \frac{n - \sqrt[3]{n^2}}{n + \sqrt{n^2+1}},$$

$$\text{j.) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+3}{n+1}}{\binom{n+4}{n+2}}, \quad \text{k.) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^{100} + 3^n}{8 \cdot 3^n + 1}}.$$