Racionális törtfüggvények
Definíció

Két polinom hányadosát racionális törtfüggvénynek nevezzük, jelben: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Racionális törtfüggvények ábrázolása, határértékek a „kritikus" helyeken

„Kritikus" helynek nevezzük a $\pm\infty$-t valamint azokat a helyeket ahol a nevező nulla.

Vegyük észre, hogy ahol a racionális törtfüggvény nevezője nulla, és a számlálója nem nulla, ott a függvénynek ∞ a határértéke (szimbolikusan $\dfrac{c}{0}=\infty$). Ahol a nevező is és a számláló is nulla, ott ki kell számolni a határértékét (szimbolikusan $\dfrac{0}{0}$ határozatlan alak)

A végtelenben vett határértékét az dönti el, hogy a számláló foka nagyobb-e mint a nevező foka, vagy fordítva, vagy egyenlő.

Ha $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ esetén ha $n>m$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\infty$,

ha $m>n$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0$,

ha $n>m$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=C$, ahol C a két polinomok legmagasabb fokú tagja együtthatóinak hányadosa.

Példa:

Ábrázoljuk és állapítsuk meg a határértékeket a „kritikus" helyeken ha

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{x\left(x^2-4\right)(x-4)}{\left(x^2-9\right)(x-2)}=\frac{x^4-4x^3-4x^2+16x}{x^3-2x^2-9x+18} \qquad \text{n=4 és m=3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-4x^3-4x^2+16x}{x^3-2x^2-9x+18}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4-\frac{4}{x}+\frac{16}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{18}{x^3}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-4x^3-4x^2+16x}{x^3-2x^2-9x+18}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-4-\frac{4}{x}+\frac{16}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{18}{x^3}}=-\infty$$

Nézzük meg, hogy ahol a nevező =0, azaz x=3, x=-3, és x=2 helyeken, , van-e határértéke

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\left(x^2-4\right)(x-4)}{\left(x^2-9\right)(x-2)}=?$ Ha $x\to3$ akkor a számláló tart -15 höz (behelyettesítjük a számlálóba az x=3 értéket), a nevező pedig tart nullához. Szimbolikusan: $\left(\dfrac{C}{0}\right)$.

Ez nem határozatlan alak, ez mindig ∞. A kérdés csak az, hogy $+\infty$ vagy $-\infty$.
Ha az x=3 helyhez közelítünk jobbról, azaz 3-nál nagyobb értékeket helyettesítünk a törtbe, akkor a kapott tört értéke negatív, egyre kisebb szám, azaz

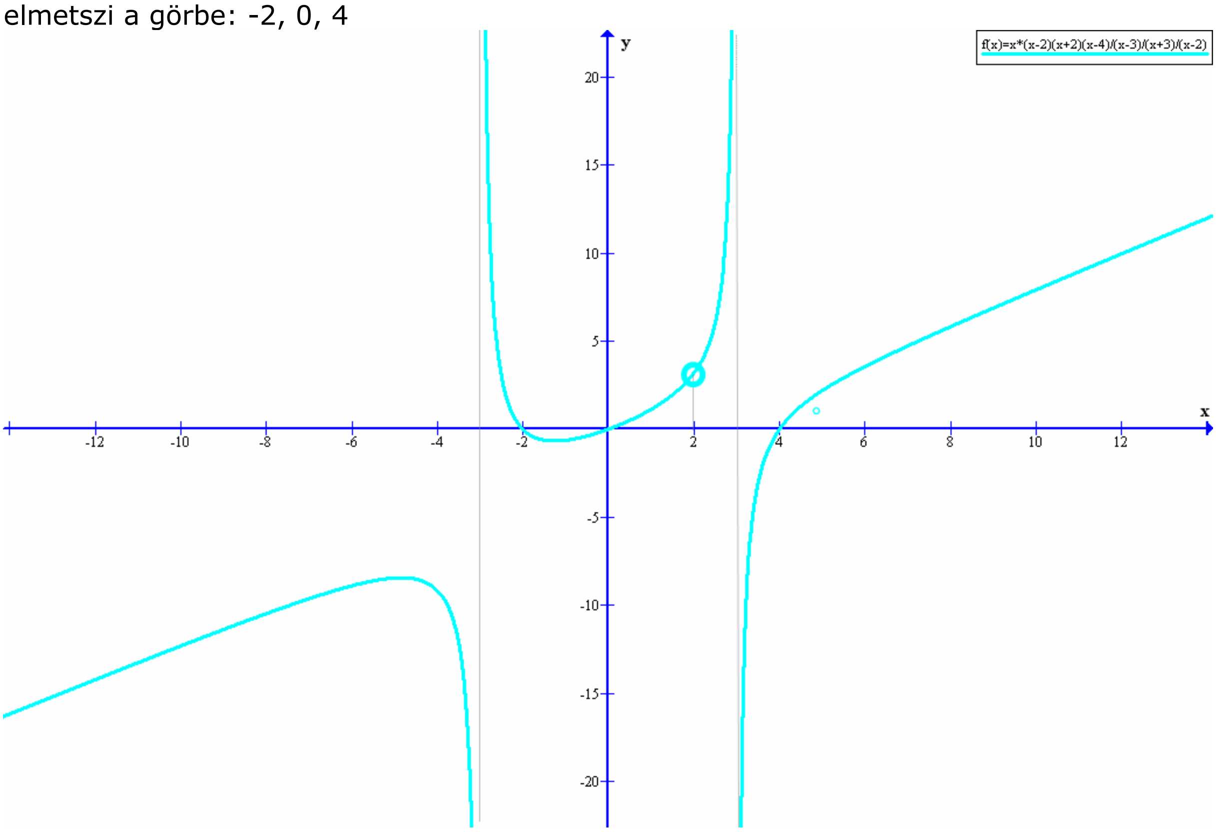
$$\lim_{x\to 3+} \frac{x\left(x^2-4\right)\left(x-4\right)}{\left(x^2-9\right)(x-2)} = -\infty$$

Ha az x=3 helyhez közelítünk balról, azaz 3-nál kisebb értékeket helyettesítünk a törtbe, akkor a kapott tört értéke pozitív, egyre nagyobb szám, azaz $\lim_{x\to 3-} \frac{x\left(x^2-4\right)\left(x-4\right)}{\left(x^2-9\right)(x-2)} = +\infty$

A x=2 ben mind a számláló mind a nevező nulla.

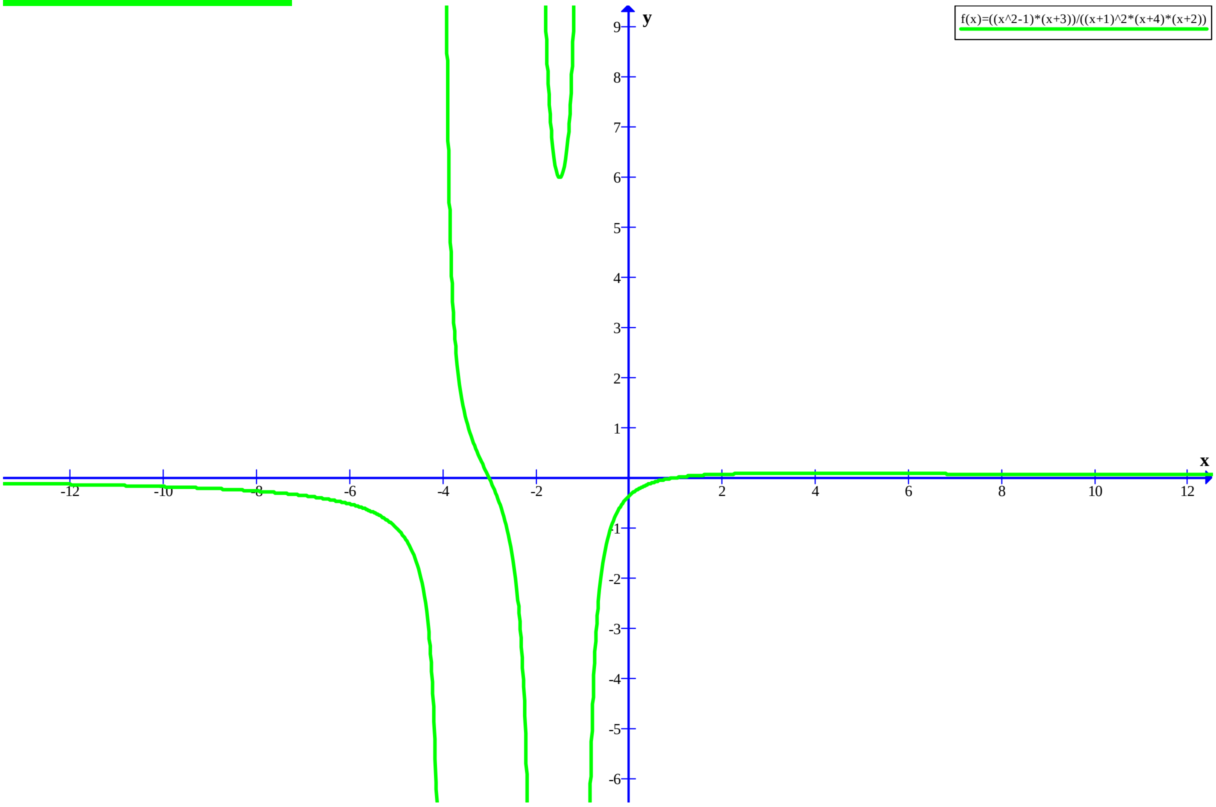
$$\lim_{x\to 2} \frac{x\left(x^2-4\right)\left(x-4\right)}{\left(x^2-9\right)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x-4\right)}{\left(x^2-9\right)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x\left(x+2\right)\left(x-4\right)}{\left(x^2-9\right)} = \frac{2\cdot 4\cdot(-2)}{-5} = \frac{16}{5}$$

Azaz itt véges határértéke van függvénynek. Továbbá a zérushelyek, ahol az x-tengelyt elmetszi a görbe: -2, 0, 4



Állapítsuk meg a „kritikus” helyeken a határértékét a következő függvényeknek:

$$\frac{\left(x^2-1\right)\left(x+3\right)}{\left(x+1\right)^2\left(x+4\right)\left(x+2\right)}$$



Megoldás:

$$y=\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$$