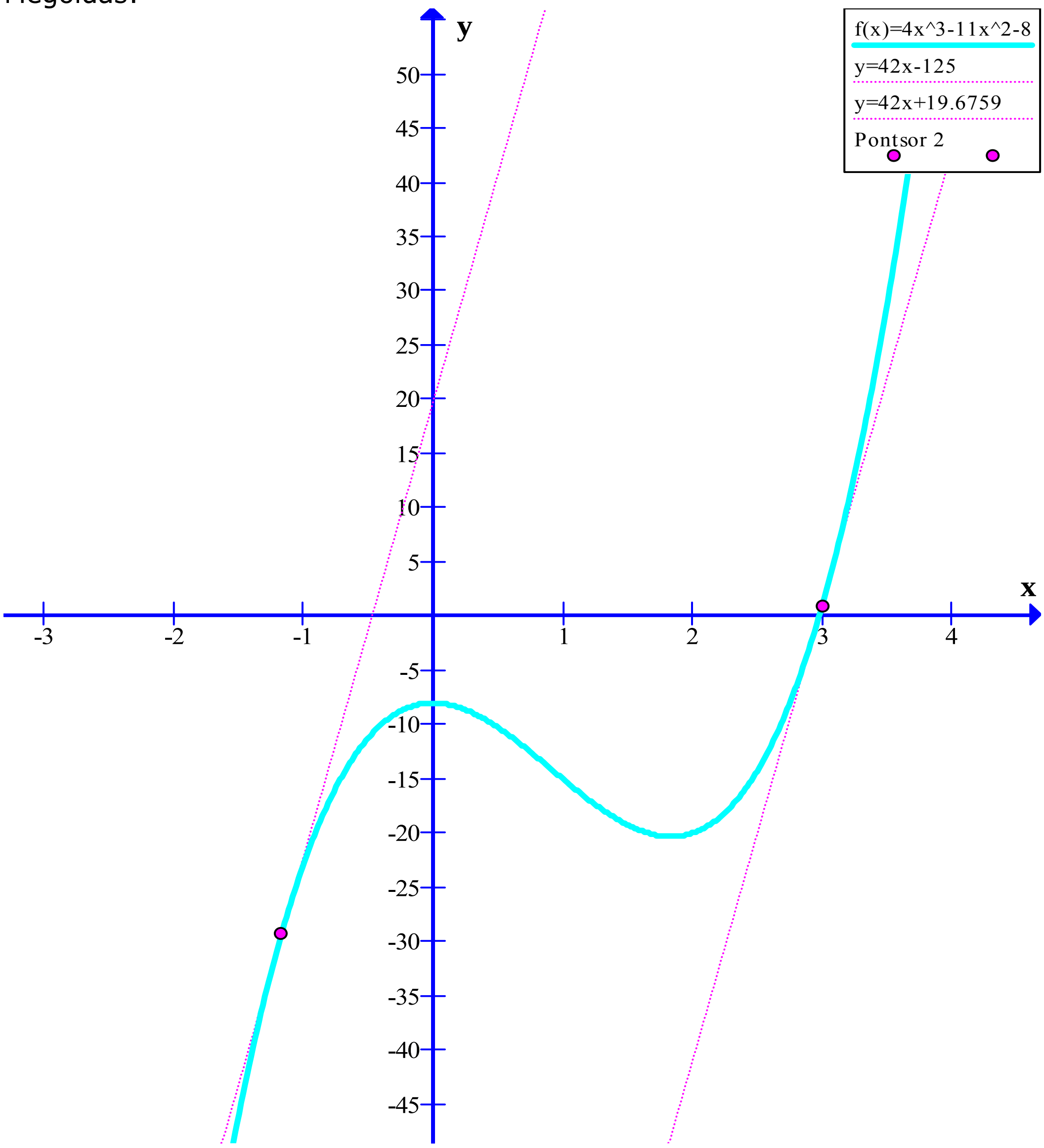
1. Határozza meg az $y = 4x^3 - 11x^2 - 8$ függvény grafikonjának az $y = 42x + 2009$ egyenessel párhuzamos érintőit!

Megoldás:



A megadott egyenes meredeksége 42, tehát keresünk a függvény grafikonján olyan pontokat amelyekben a derivált értéke = 42

$y' = 12x^2 - 22x$, keressük azokat az x-eket ahol $y' = 12x^2 - 22x = 42$, azaz $12x^2 - 22x = 42$, innen $12x^2 - 22x - 42 = 0$, $6x^2 - 11x - 21 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{625}}{12}$ $\qquad$ $x_{1,2} = \dfrac{11 \pm 25}{12}$, $\qquad$ $x_1 = 3$, $x_2 = -\dfrac{7}{6}$

Tehát két lehetséges hely pont $x_1 = 3$ és $x_2 = -\frac{7}{6}$. Meg kell határozni ezekben a pontokban a függvény értékét. $f(x_1) = 4\cdot 3^3 - 11\cdot 3^2 - 8 = 1$,

$f(x_2) = 4\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)^3 - 11\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)^2 - 8 = -29,324$

Tehát az egyik pont $P_1 = (3;1)$ a másik pont $P_2 = \left(-\frac{7}{6};-29.32\right)$

A függvény egy adott x_0 értékéhez tartozó pontján átmenő érintő egyenlete:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, , de jelene esetben éppen úgy határoztuk meg a pontokat, hogy $f'(x_0) = 42$

behelyettesítve $x_1 = 3$, az érintő egyenlete: $y - 1 = 42(x-3)$, azaz $\boxed{y = 42x - 125}$,

behelyettesítve $x_2 = -\frac{5}{3}$, az érintő egyenlete: $y + 29,32 = 42\left(x + \frac{7}{6}\right) = 42x + 49$, azaz

$\boxed{y = 42x + 19,68}$,

2.

a.) $f(x) = \sqrt[3]{6x^{-2} + 2^x + tg3x}$, $f'(x) = \frac{1}{3}\left(6x^{-2} + 2^x + tg3x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-12x^{-3} + \ln 2\cdot 2^x + \frac{1}{(\cos 3x)^2}\cdot 3\right)$

b.) $g(x) = \frac{\left(x^3 + 5e^{3x} + 6x\right)\ln 4x}{\cos 2x + 10}$

$$g'(x) = \frac{\left[\left(3x^2 + 15e^{3x} + 6\right)\ln 4x + \left(x^3 + 5e^{3x} + 6x\right)\frac{1}{x}\right](\cos 2x + 10) - \left[\left(x^3 + 5e^{3x} + 6x\right)\ln 4x\right](-2\sin 2x)}{(\cos 2x + 10)^2}$$

----

2. Vizsgálja meg az $f(x) = x\cdot e^{-\frac{x}{4}}$ függvényt a következő szempontok szerint:

a.) mely intervallumban növekvő ill. csökkenő?
b.) mely intervallumban konvex ill. konkáv?
c.) Van-e szélsőértéke és ha igen hol?

$f(x) = x\cdot e^{-\frac{x}{4}}$ $f'(x) = e^{-\frac{x}{4}} + x\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{x}{4}} = e^{-\frac{x}{4}}\left(1 - \frac{x}{4}\right)$, $f'(x) = 0$

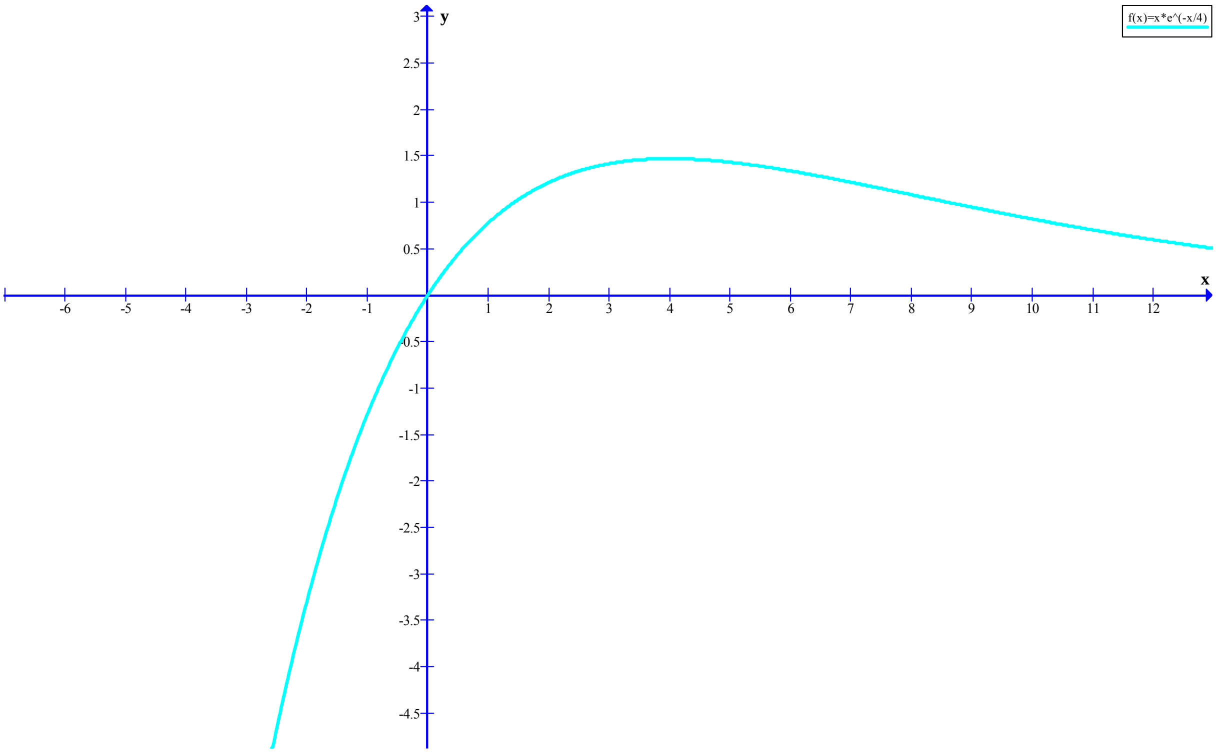
$e^{-\frac{x}{4}}\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0$, $e^{-\frac{x}{4}} \neq 0$, így $\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0$, $x = 4$

$f'(x) = e^{-\frac{x}{4}}\left(1 - \frac{x}{4}\right)$

$f''(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\left(1-\frac{x}{4}\right) + e^{-\frac{x}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\left(2-\frac{x}{4}\right)$, $f''(x)=0$, $-\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\left(2-\frac{x}{4}\right)=0$

$x=8$,

	$(-\infty,4)$	4	$(4,8)$	8	$(8,+\infty)$
$f(x)$	nő, konkáv	max	Csökken konkáv	inf	csökken konvex
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+



---

4. $y=\sqrt{6x}$

A parabola egy tetszőleges pontjának $\left(x,\sqrt{6x}\right)$ és a $(8,0)$ pontnak a távolsága:

$d=\sqrt{(x-8)^2+\left(\sqrt{6x}-0\right)^2}=\sqrt{(x-8)^2+6x}=\sqrt{x^2-10x+64}$,

$d'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-10x+64}}(2x-10)$, $d'=0$, ha $x=5$, tehát a $\left(5,\sqrt{30}\right)$ pontja van a legközelebb az adott ponthoz.