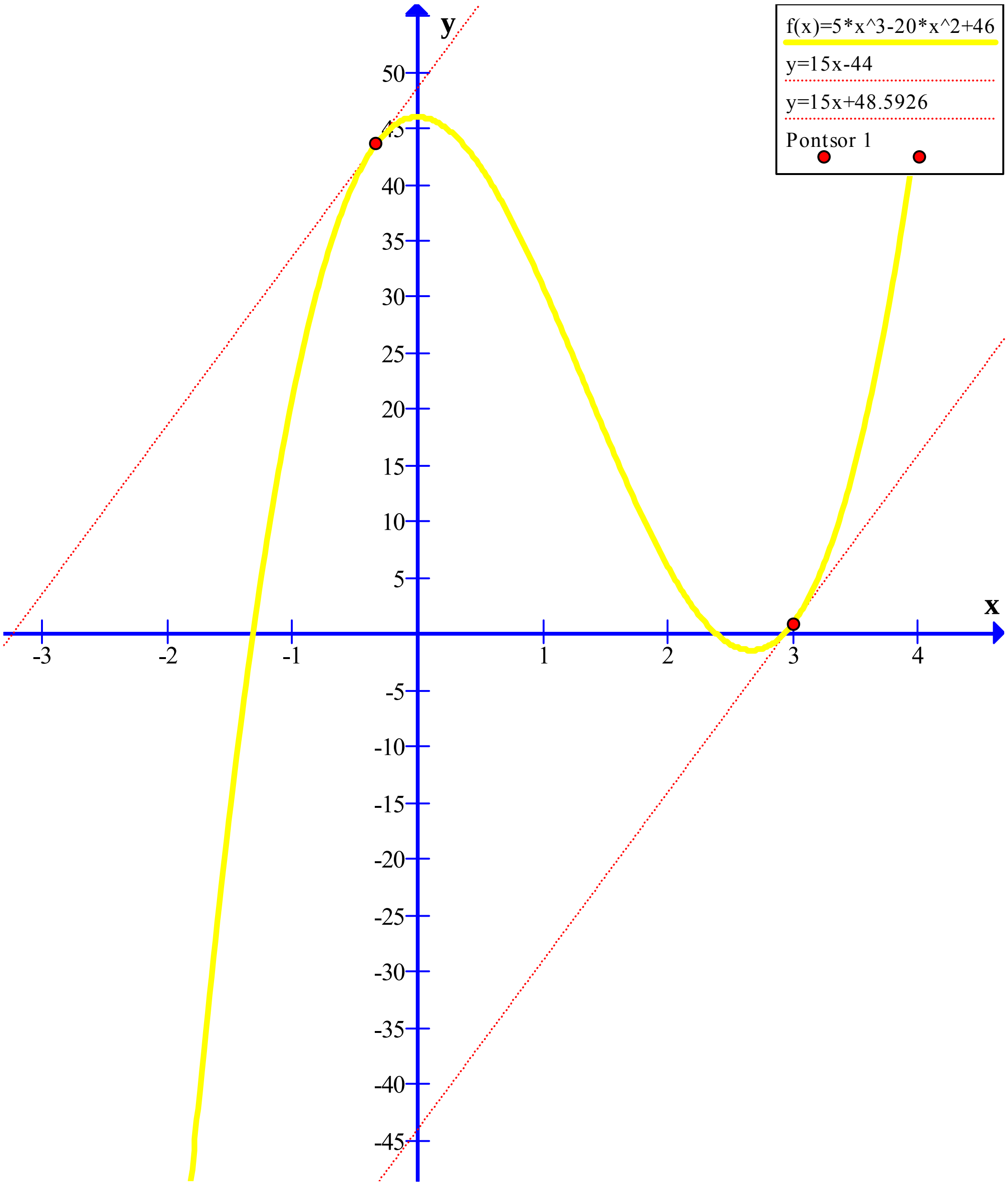
1. Határozza meg az $y = 5x^3 - 20x^2 + 46$ függvény grafikonjának az $y = 15x + 2009$ egyenessel párhuzamos érintőit!

Megoldás:



A megadott egyenes meredeksége 15, tehát keresünk a függvény grafikonján olyan pontokat amelyekben a derivált értéke = 15

$y' = 15x^2 - 40x$, keressük azokat az x-eket ahol $y' = 15x^2 - 40x = 15$, azaz $15x^2 - 40x = 15$, innen $15x^2 - 40x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{1600+900}}{30} \qquad x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{1}{3}$$

Tehát két lehetséges hely pont $x_1 = 3$ és $x_2 = -\frac{1}{3}$. Meg kell határozni ezekben a pontokban a függvény értékét. $f(x_1) = 5\cdot 3^3 - 20\cdot 3^2 + 46 = 1$,

$$f(x_2) = 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 20\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 46 = 43,59$$

Tehát az egyik pont $P_1 = (3;1)$ a másik pont $P_2 = \left(-\frac{1}{3}; 43.59\right)$

A függvény egy adott x_0 értékéhez tartozó pontján átmenő érintő egyenlete:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, , de jelene esetben éppen úgy határoztuk meg a pontokat, hogy $f'(x_0) = 15$

behelyettesítve $x_1 = 3$, az érintő egyenlete: $y - 1 = 15(x-3)$, azaz $\boxed{y = 15x - 44}$,

behelyettesítve $x_2 = -\frac{1}{3}$, az érintő egyenlete: $y - 43.59 = 15\left(x + \frac{1}{3}\right) = 15x + 5$, azaz $\boxed{y = 15x + 48,59}$,

---

2.

a. $f(x) = \sqrt[3]{4x^{-2} + 2^x + tg3x}$, $f'(x) = \frac{1}{3}\left(4x^{-2} + 2^x + tg3x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-8x^{-3} + \ln 2\cdot 2^x + \frac{1}{(\cos 3x)^2}\cdot 3\right)$

b. $g(x) = \frac{\left(x^3 + e^{3x}\right)\ln 8x}{\cos 2x + 10}$

$$g'(x) = \frac{\left[\left(3x^2 + 3e^{3x}\right)\ln 8x + \left(x^3 + e^{3x}\right)\frac{8}{8x}\right](\cos 2x + 10) - \left[\left(x^3 + e^{3x}\right)\ln 8x\right](-2\sin 2x)}{(\cos 2x + 10)^2}$$

---

3. Vizsgálja meg az $f(x) = (x-2)\cdot e^{5x}$ függvényt a következő szempontok szerint:

a.) mely intervallumban növekvő ill. csökkenő?
b.) mely intervallumban konvex ill. konkáv?
c.) Van-e szélsőértéke és ha igen hol?

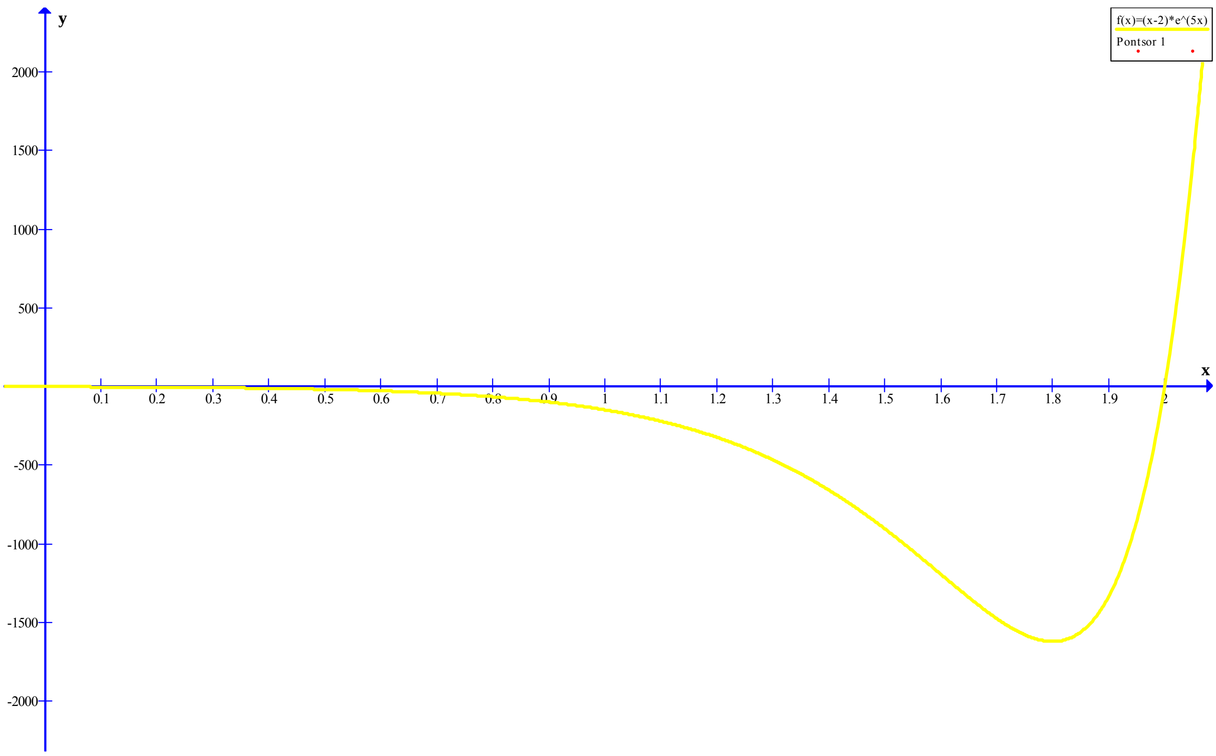
$$f(x) = (x-2)\cdot e^{5x} \qquad f'(x) = e^{5x} + (x-2)\cdot e^{5x}5 = e^{5x}\left(1 + 5(x-2)\right) = e^{5x}(5x-9), \quad f'(x) = 0$$

$$e^{5x}(5x-9) = 0, \qquad e^{5x} \neq 0,\ \text{így}\ (5x-9) = 0, \qquad x = \frac{9}{5}$$

$$f'(x) = e^{5x}(5x-9)$$

$$f''(x) = 5e^{5x}(5x-9) + e^{5x}\cdot 5 = 5e^{5x}\cdot(5x-8),\ \ f''(x) = 0,\ \ (5x-8) = 0 \qquad x = \frac{8}{5},$$

	$\left(-\infty,\frac{8}{5}\right)$	$\frac{8}{5}$	$\left(\frac{8}{5},\frac{9}{5}\right)$	$\frac{9}{5}$	$\left(\frac{9}{5},+\infty\right)$
$f(x)$	Csökken, konkáv	inflex	Csökken konvex	min	Nő konvex
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+



---

4. $y=\sqrt{10x}$

A parabola egy tetszőleges pontjának $\left(x,\sqrt{10x}\right)$ és a $(12,0)$ pontnak a távolsága:

$$d=\sqrt{(x-12)^2+\left(\sqrt{10x}-0\right)^2}=\sqrt{(x-12)^2+10x}=\sqrt{x^2-14x+144},$$

$d'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-14x+144}}(2x-14)$, $d'=0$, ha $x=7$, tehát a $\left(7,\sqrt{70}\right)$ pontja van a legközelebb az adott ponthoz.