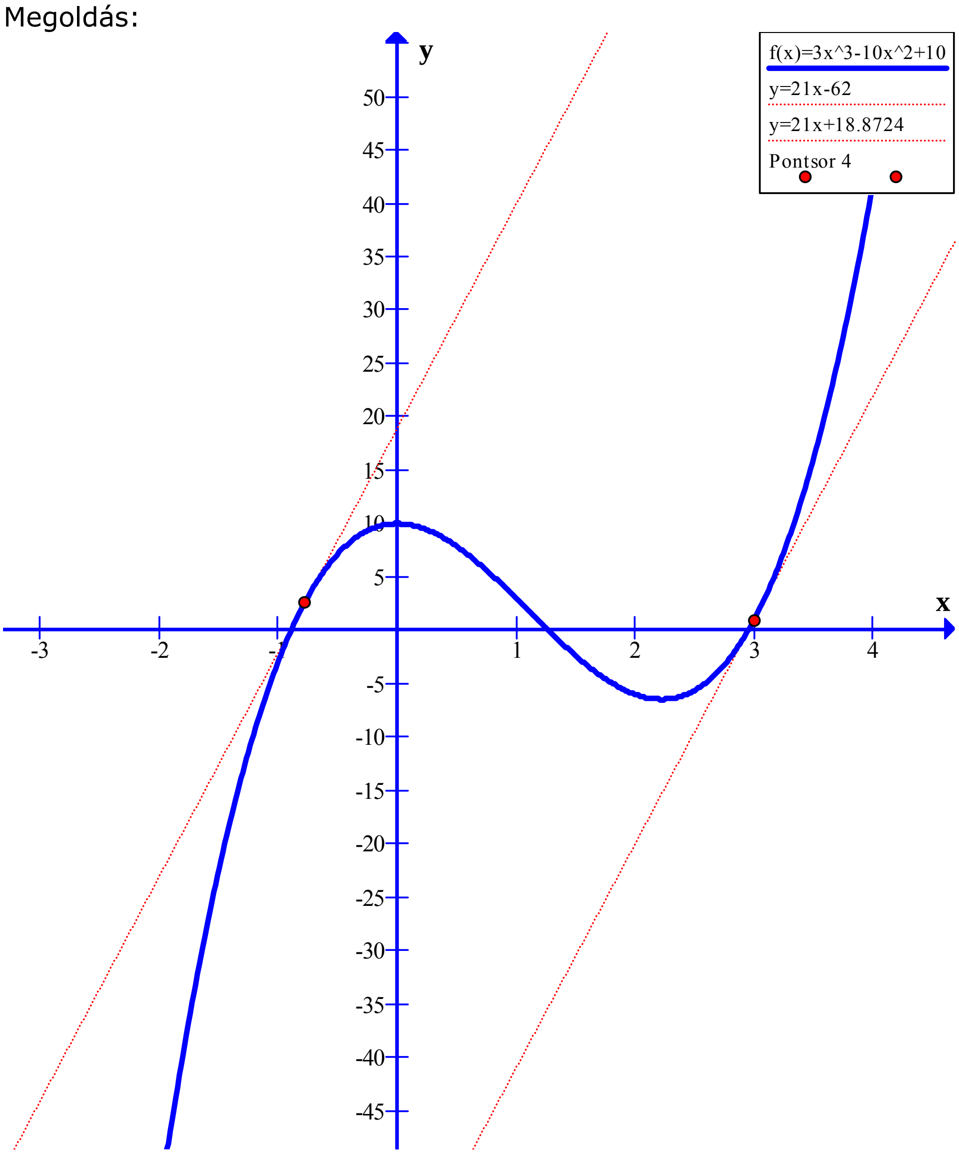
1. Határozza meg az $y = 3x^3 - 10x^2 + 10$ függvény grafikonjának az $y = 21x + 2009$ egyenessel párhuzamos érintőit!

Megoldás:



A megadott egyenes meredeksége 21, tehát keresünk a függvény grafikonján olyan pontokat amelyekben a derivált értéke = 21

$y' = 9x^2 - 20x$, keressük azokat az x-eket ahol $y' = 9x^2 - 20x = 21$, azaz $9x^2 - 20x = 21$, innen $9x^2 - 20x - 21 = 0$, $6x^2 - 11x - 21 = 0$

$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{1156}}{18}$ $\quad x_{1,2} = \frac{20 \pm 34}{18}$, $\quad x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{7}{9}$

Tehát két lehetséges hely pont $x_1 = 3$ és $x_2 = -\frac{7}{9}$. Meg kell határozni ezekben a pontokban a függvény értékét. $f(x_1) = 3 \cdot 3^3 - 10 \cdot 3^2 + 10 = 1$,

$$f(x_2) = 3 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^3 - 10 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^2 + 10 = 2,539095$$

Tehát az egyik pont $P_1 = (3;1)$ a másik pont $P_2 = \left(-\frac{7}{9}; 2,539095\right)$

A függvény egy adott x_0 értékéhez tartozó pontján átmenő érintő egyenlete:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, , de jelene esetben éppen úgy határoztuk meg a pontokat, hogy $f'(x_0) = 42$

behelyettesítve $x_1 = 3$, az érintő egyenlete: $y - 1 = 21(x-3)$, azaz $\boxed{y = 21x - 62}$,

behelyettesítve $x_2 = -\frac{7}{9}$, az érintő egyenlete: $y - 2,53909 = 21\left(x + \frac{7}{9}\right) = 21x + 16,3333$,

azaz $\boxed{y = 21x + 18,872}$,

2.

a. $f(x) = \left(4x^3 + \ln(2x+e) - sh5x\right)^{-1}$,

$$f'(x) = -1 \cdot \left(4x^3 + \ln(2x+e) - sh5x\right)^{-2} \left(12x^2 + \frac{1}{2x+e} \cdot 2 - ch5x \cdot 5\right)$$

b. $g(x) = \dfrac{\left(8e^{5x} + 6\sqrt{x^2+1}\right)\ln 7x}{\cos 2x + 10}$

$$g'(x) = \frac{\left[\left(40e^{5x} + \frac{12x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\ln 7x + \left(8e^{5x} + 6\sqrt{x^2+1}\right)\frac{7}{7x}\right](\cos 2x + 10) - \left[\left(8e^{5x} + 6\sqrt{x^2+1}\right)\ln 7x\right](-2\sin 2x)}{(\cos 2x + 10)^2}$$

---

3. Vizsgálja meg az $f(x) = (x+1) \cdot e^{-4x}$ függvényt a következő szempontok szerint:
   a.) mely intervallumban növekvő ill. csökkenő?
   b.) mely intervallumban konvex ill. konkáv?
   c.) Van-e szélsőértéke és ha igen hol?

$f(x) = (x+1) \cdot e^{-4x}$ $\quad f'(x) = e^{-4x} + (x+1) \cdot e^{-4x}(-4) = e^{-4x}\left(1 - 4(x+1)\right) = e^{-4x}(-4x-3)$,

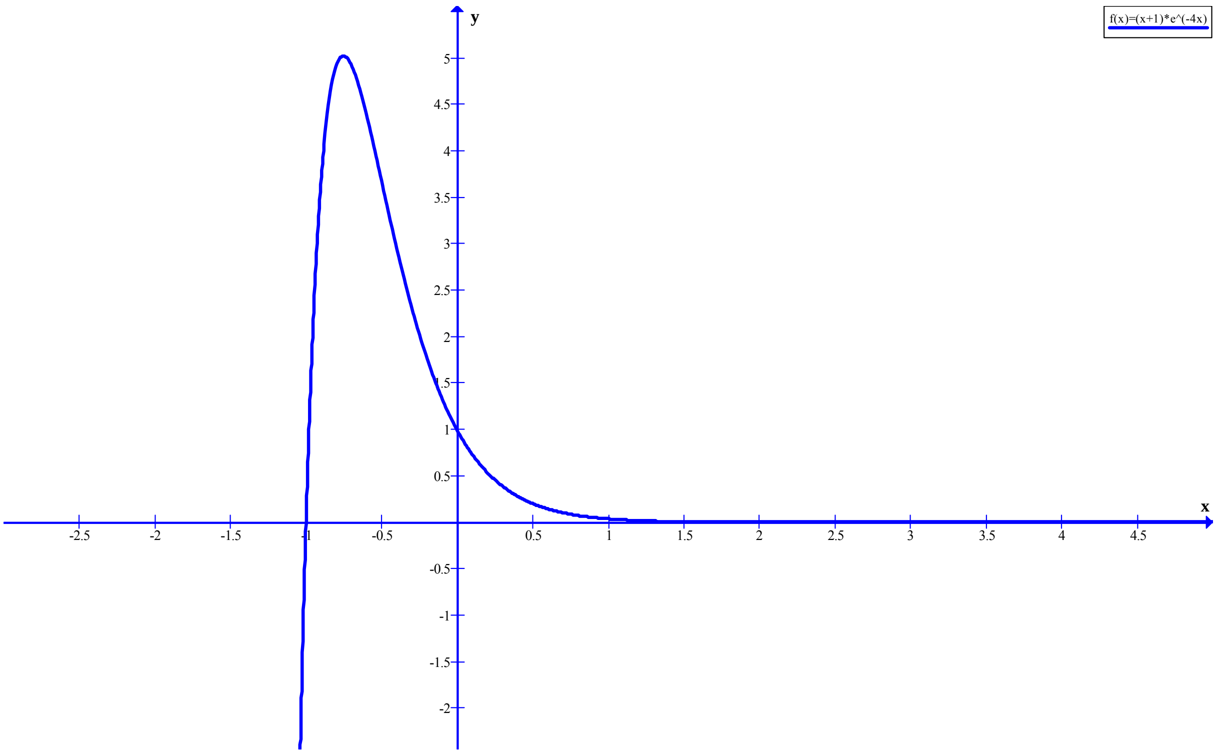
$f'(x) = 0$

$e^{-4x}(-4x-3) = 0$, $\quad e^{-4x} \neq 0$, így $(-4x-3) = 0$, $\quad x = -\frac{3}{4}$

$f'(x) = -e^{-4x}(4x+3)$

$f''(x) = 4e^{-4x}(4x+3) - 4e^{-4x} = 4e^{-4x}(4x+2)$, $f''(x) = 0$, $(4x+2) = 0$ $\quad x = -\frac{1}{2}$,

	$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)$	$-\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{9}{5},+\infty\right)$
$f(x)$	nő, konkáv	max	Csökken konkáv	inf	csökken konvex
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+



---

4. $y=\sqrt{8x}$

A parabola egy tetszőleges pontjának $\left(x,\sqrt{8x}\right)$ és a $(12,0)$ pontnak a távolsága:

$$d=\sqrt{(x-12)^2+\left(\sqrt{8x}-0\right)^2}=\sqrt{(x-12)^2+8x}=\sqrt{x^2-16x+144}\,,$$

$d'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-16x+144}}(2x-16)$, $d'=0$, ha $x=8$, tehát a $\left(8,\sqrt{64}\right)=(8,8)$ pontja van a legközelebb az adott ponthoz.