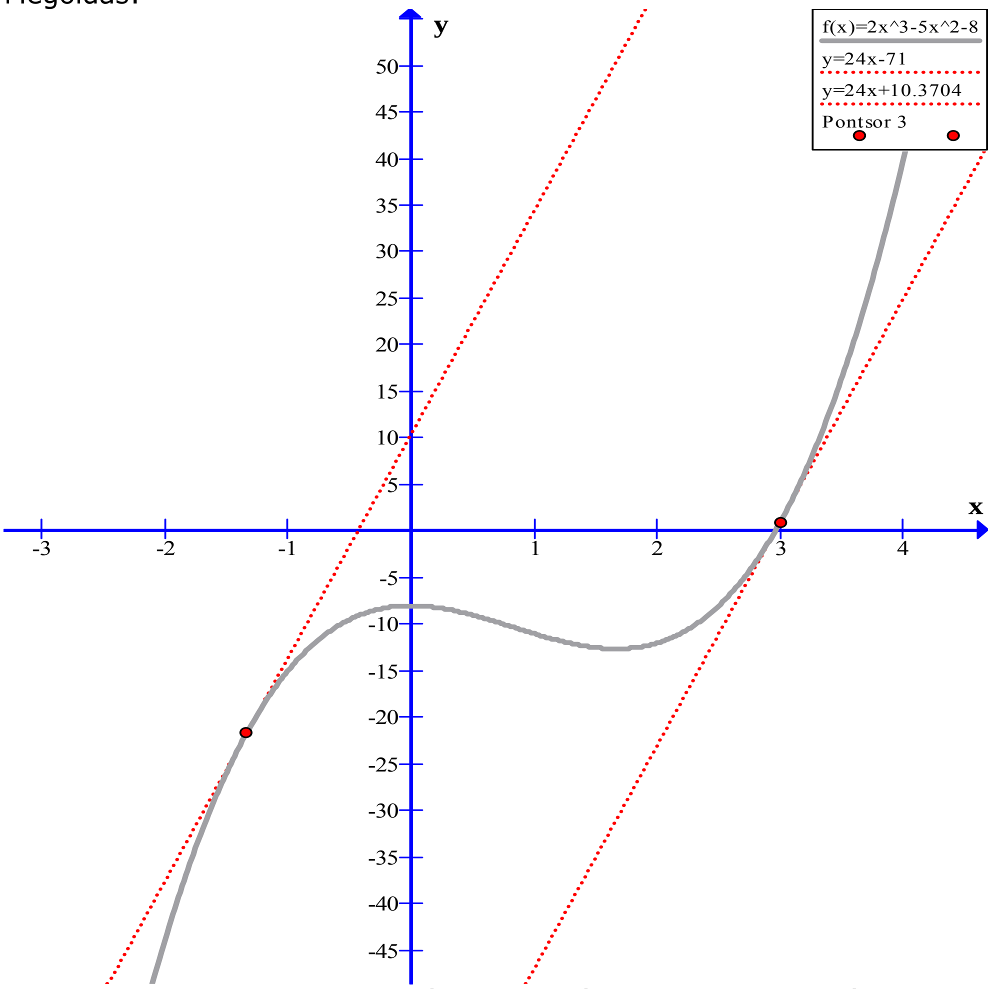
1. Határozza meg az $y = 2x^3 - 5x^2 - 8$ függvény grafikonjának az $y = 24x + 2009$ egyenessel párhuzamos érintőit!

Megoldás:



A megadott egyenes meredeksége 24, tehát keresünk a függvény grafikonján olyan pontokat amelyekben a derivált értéke = 24

$y' = 6x^2 - 10x$, keressük azokat az x-eket ahol $y' = 6x^2 - 10x = 24$, azaz $6x^2 - 10x = 24$, innen $6x^2 - 10x - 24 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{676}}{12} \qquad x_{1,2} = \frac{10 \pm 26}{12}, \qquad x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{4}{3} = -1{,}3333$$

Tehát két lehetséges hely pont $x_1 = 3$ és $x_2 = -\frac{4}{3}$. Meg kell határozni ezekben a pontokban a függvény értékét. $f(x_1) = 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 8 = 1$,

$$f(x_2) = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 8 = -21{,}6296$$

Tehát az egyik pont $P_1 = (3;1)$ a másik pont $P_2 = \left(-\frac{4}{3}; -21.6296\right)$

A függvény egy adott x_0 értékéhez tartozó pontján átmenő érintő egyenlete:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, , de jelene esetben éppen úgy határoztuk meg a pontokat, hogy $f'(x_0) = 24$

behelyettesítve $x_1 = 3$, az érintő egyenlete: $y - 1 = 24(x-3)$, azaz $\boxed{y = 24x - 71}$,

behelyettesítve $x_1 = -\frac{4}{3}$, az érintő egyenlete: $y + 21.6296 = 24\left(x + \frac{4}{3}\right) = 24x + 32$, azaz

$\boxed{y = 24x + 10{,}3704}$,

2.

a. $f(x) = \sqrt[3]{7x^{-2} + 2^x + tg3x}$, $f'(x) = \frac{1}{3}\left(7x^{-2} + 2^x + tg3x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-14x^{-3} + \ln 2 \cdot 2^x + \frac{1}{(\cos 3x)^2} \cdot 3\right)$

b. $g(x) = \frac{\left(x^3 + 8e^{5x} + 6x\right)\ln 7x}{\cos 2x + 10}$

$$g'(x) = \frac{\left[\left(3x^2 + 40e^{5x} + 6\right)\ln 7x + \left(x^3 + 8e^{5x} + 6x\right)\frac{1}{x}\right](\cos 2x + 10) - \left[\left(x^3 + 8e^{5x} + 6x\right)\ln 7x\right](-2\sin 2x)}{(\cos 2x + 10)^2}$$

---

3. Vizsgálja meg az $f(x) = x \cdot e^{\frac{x}{3}}$ függvényt a következő szempontok szerint:
   a.) mely intervallumban növekvő ill. csökkenő?
   b.) mely intervallumban konvex ill. konkáv?
   c.) Van-e szélsőértéke és ha igen hol?

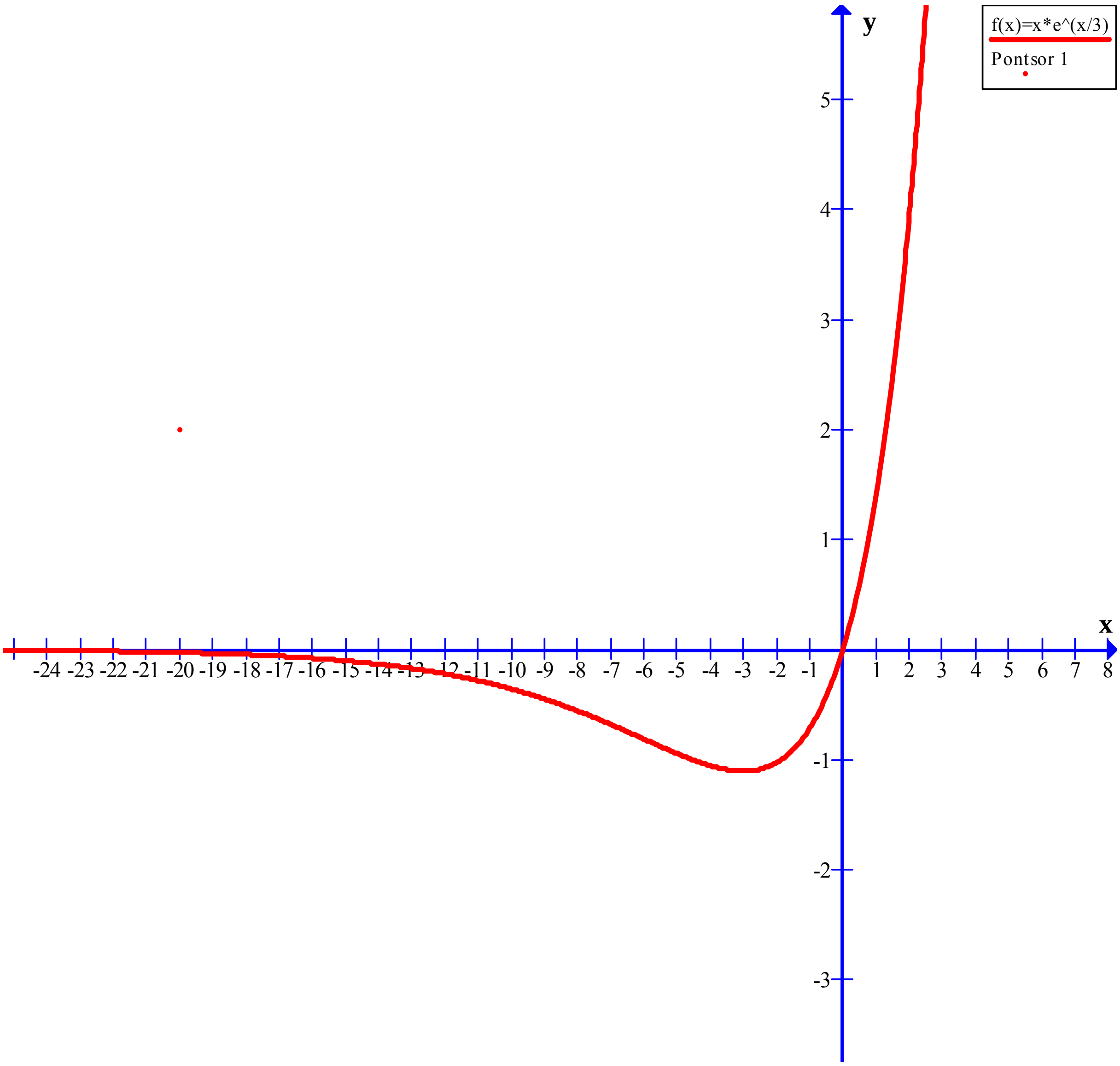
$f(x) = x \cdot e^{\frac{x}{3}}$ $\quad f'(x) = e^{\frac{x}{3}} + x \cdot e^{\frac{x}{3}}\frac{1}{3} = e^{\frac{x}{3}}\left(1 + \frac{x}{3}\right)$, $\quad f'(x) = 0$

$e^{\frac{x}{3}}\left(1 + \frac{x}{3}\right) = 0$, $\quad e^{\frac{x}{3}} \neq 0$, $\frac{x}{3} = -1$, $\quad x = -3$

$f''(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + e^{\frac{x}{3}}\frac{1}{3} = e^{\frac{x}{3}}\frac{1}{3}\left(2 + \frac{x}{3}\right)$, $f''(x) = 0$, $\quad \left(2 + \frac{x}{3}\right) = 0 \quad \frac{x}{3} = -2$, $x = -6$

	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, -3)$	-3	$(-3, \infty)$
$f(x)$	Csökken, konkáv	inflex	Csökken konvex	min	Nő konvex
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+

Tehát a függvény szig. monoton csökken $(-\infty,-3)$ intervallumban, szig. monoton nő $(-3,+\infty)$ intervallumban,minimuma van az $x=-3$ pontban..
Tehát a függvény konkáv $(-\infty,-6)$ intervallumban, konvex $(-6,+\infty)$ intervallumban,inflexiós pontja van az $x=-6$ pontban..



---

4. $y=\sqrt{10x}$

A parabola egy tetszőleges pontjának $\left(x,\sqrt{10x}\right)$ és a $(8,0)$ pontnak a távolsága:

$d=\sqrt{(x-8)^2+\left(\sqrt{10x}-0\right)^2}=\sqrt{(x-8)^2+10x}=\sqrt{x^2-6x+64}$,

$d'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-6x+64}}(2x-6)$, $d'=0$, ha $x=3$, tehát a $\left(3,\sqrt{30}\right)$ pontja van a legközelebb az adott ponthoz.