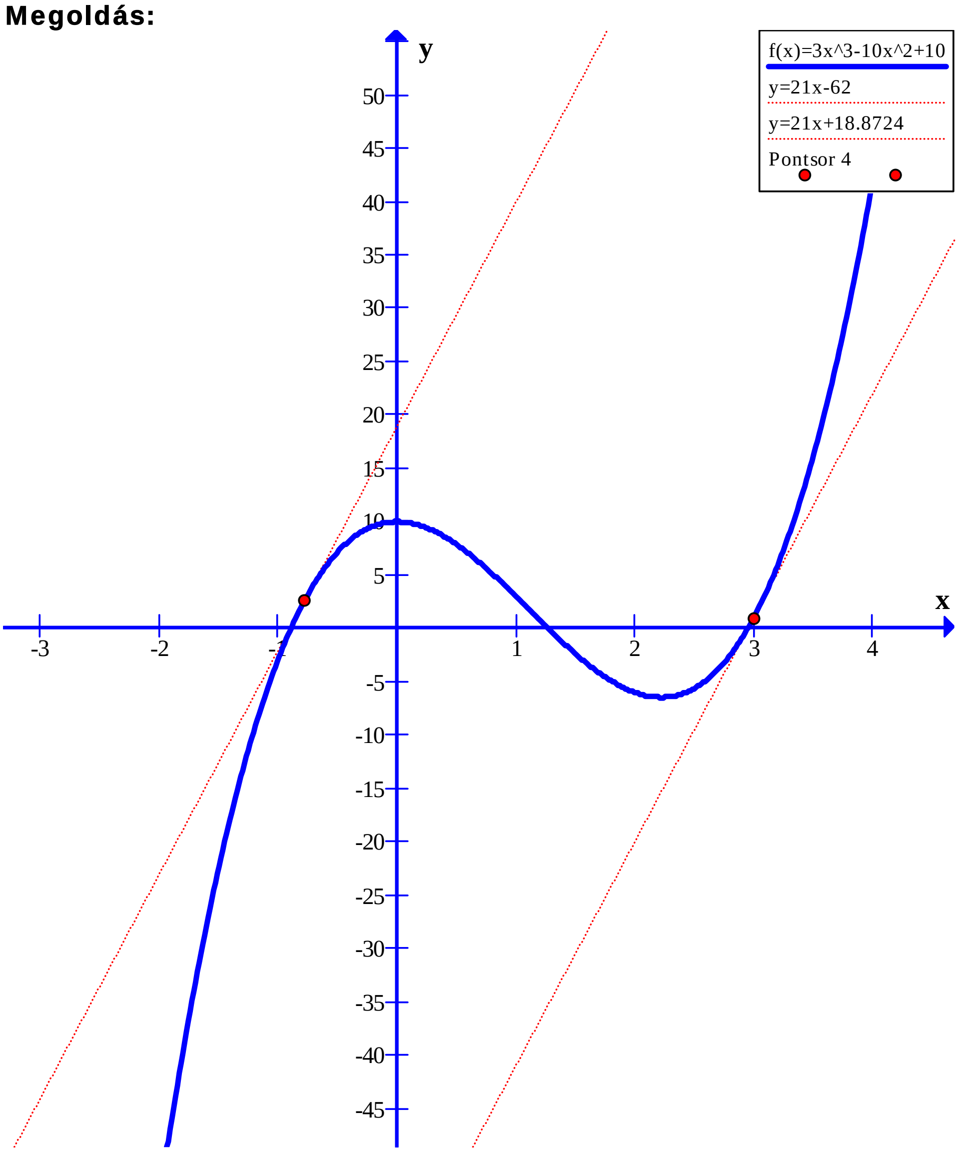
1. Határozza meg az $y = 3x^3 - 10x^2 + 10$ függvény grafikonjának az $y = 21x + 2011$ egyenessel párhuzamos érintőit!

**Megoldás:**




A megadott egyenes meredeksége 21, tehát keresünk a függvény grafikonján olyan pontokat amelyekben a derivált értéke = 21

$y' = 9x^2 - 20x$, keressük azokat az x-eket ahol $y' = 9x^2 - 20x = 21$, azaz $9x^2 - 20x = 21$, innen $9x^2 - 20x - 21 = 0$, $6x^2 - 11x - 21 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{20 \pm \sqrt{1156}}{18}$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{20 \pm 34}{18}$, $\quad x_1 = 3$, $x_2 = -\dfrac{7}{9}$

Tehát két lehetséges hely pont $x_1 = 3$ és $x_2 = -\frac{7}{9}$. Meg kell határozni ezekben a pontokban a függvény értékét. $f(x_1) = 3\cdot 3^3 - 10\cdot 3^2 + 10 = 1$,

$$f(x_2) = 3\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)^3 - 10\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)^2 + 10 = 2,539095$$

Tehát az egyik pont $P_1 = (3;1)$ a másik pont $P_2 = \left(-\frac{7}{9}; 2,539095\right)$

A függvény egy adott $x_0$ értékéhez tartozó pontján átmenő érintő egyenlete:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, , de jelene esetben éppen úgy határoztuk meg a pontokat, hogy $f'(x_0) = 42$

behelyettesítve $x_1 = 3$ , az érintő egyenlete: $y - 1 = 21(x-3)$, azaz $\boxed{y = 21x - 62}$,

behelyettesítve $x_2 = -\frac{7}{9}$ , az érintő egyenlete: $y - 2,53909 = 21\left(x + \frac{7}{9}\right) = 21x + 16,3333$, azaz $\boxed{y = 21x + 18,872}$,

---

2. Határozza meg következő függvények deriváltját!

$$f(x) = \left(4x^3 + \ln(2x+e) - sh5x\right)^{-1}, \quad g(x) = \frac{\left(8e^{5x} + 6\sqrt{x^2+1}\right)\ln 7x}{\cos 2x + 10}$$

**Megoldás:**

a. $f(x) = \left(4x^3 + \ln(2x+e) - sh5x\right)^{-1}$,

$$f'(x) = -1\cdot\left(4x^3 + \ln(2x+e) - sh5x\right)^{-2}\left(12x^2 + \frac{1}{2x+e}\cdot 2 - ch5x\cdot 5\right)$$

b. $g(x) = \dfrac{\left(8e^{5x} + 6\sqrt{x^2+1}\right)\ln 7x}{\cos 2x + 10}$

$$g'(x) = \frac{\left[\left(40e^{5x} + \frac{12x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\ln 7x + \left(8e^{5x} + 6\sqrt{x^2+1}\right)\frac{7}{7x}\right](\cos 2x + 10) - \left[\left(8e^{5x} + 6\sqrt{x^2+1}\right)\ln 7x\right](-2\sin 2x)}{(\cos 2x + 10)^2}$$

---

3. Az ***a*** paraméter mely értéke mellett lesz az alábbi függvény folytonos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log_4(3+x) - \log_4 3}{x} & ha \quad x < 0 \\ x + a & ha \quad x \geq 0 \end{cases}$$

**Megoldás:**

Meg kell vizsgálni a $\frac{\log_4(3+x)-\log_4 3}{x}$ függvény bal oldali határértékét az origóban és annak meg kell egyezni az $x+a$ függvény jobb oldali határértékével.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\log_4(3+x)-\log_4 3}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\log_4\frac{(3+x)}{3}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\log_4\frac{(3+x)}{3}=\lim_{x\to 0-}\log_4\left[\frac{(3+x)}{3}\right]^{\frac{1}{x}}$$

Először meghatározzuk a logaritmus függvény nélkül a belső függvény határértékét,

$\lim_{x\to 0-}\left[\frac{(3+x)}{3}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0-}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ ez egy $\left(1^{\infty}\right)$ határozatlan alakú határérték melyet visszavezetünk már ismert határértékre a $t=\frac{1}{x}$ helyettesítéssel.

$\lim_{x\to 0-}$ esetén $\lim_{t\to -\infty}$

Tehát $\lim_{x\to 0-}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to -\infty}\left(1+\frac{1}{3t}\right)^{t}=\lim_{t\to -\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{t}\right)^{t}=e^{\frac{1}{3}}$

Az eredeti függvény határértéke tehát $\log_4\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{\ln e^{\frac{1}{3}}}{\ln 4}=\frac{\frac{1}{3}}{\ln 4}=\frac{1}{3\ln 4}$

$$a=\frac{1}{3\ln 4}$$

---

4. Határozza meg az $y=\sqrt{8x}$ parabolának azt a pontját, amelyik a $(12,0)$ koordinátájú ponthoz a legközelebb van

**Megoldás:**

$$y=\sqrt{8x}$$

A parabola egy tetszőleges pontjának $\left(x,\sqrt{8x}\right)$ és a $(12,0)$ pontnak a távolsága:

$d=\sqrt{(x-12)^2+\left(\sqrt{8x}-0\right)^2}=\sqrt{(x-12)^2+8x}=\sqrt{x^2-16x+144}$,

$d'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-16x+144}}(2x-16)$, $d'=0$, ha $x=8$, tehát a $\left(8,\sqrt{64}\right)=(8,8)$ pontja van a legközelebb az adott ponthoz.