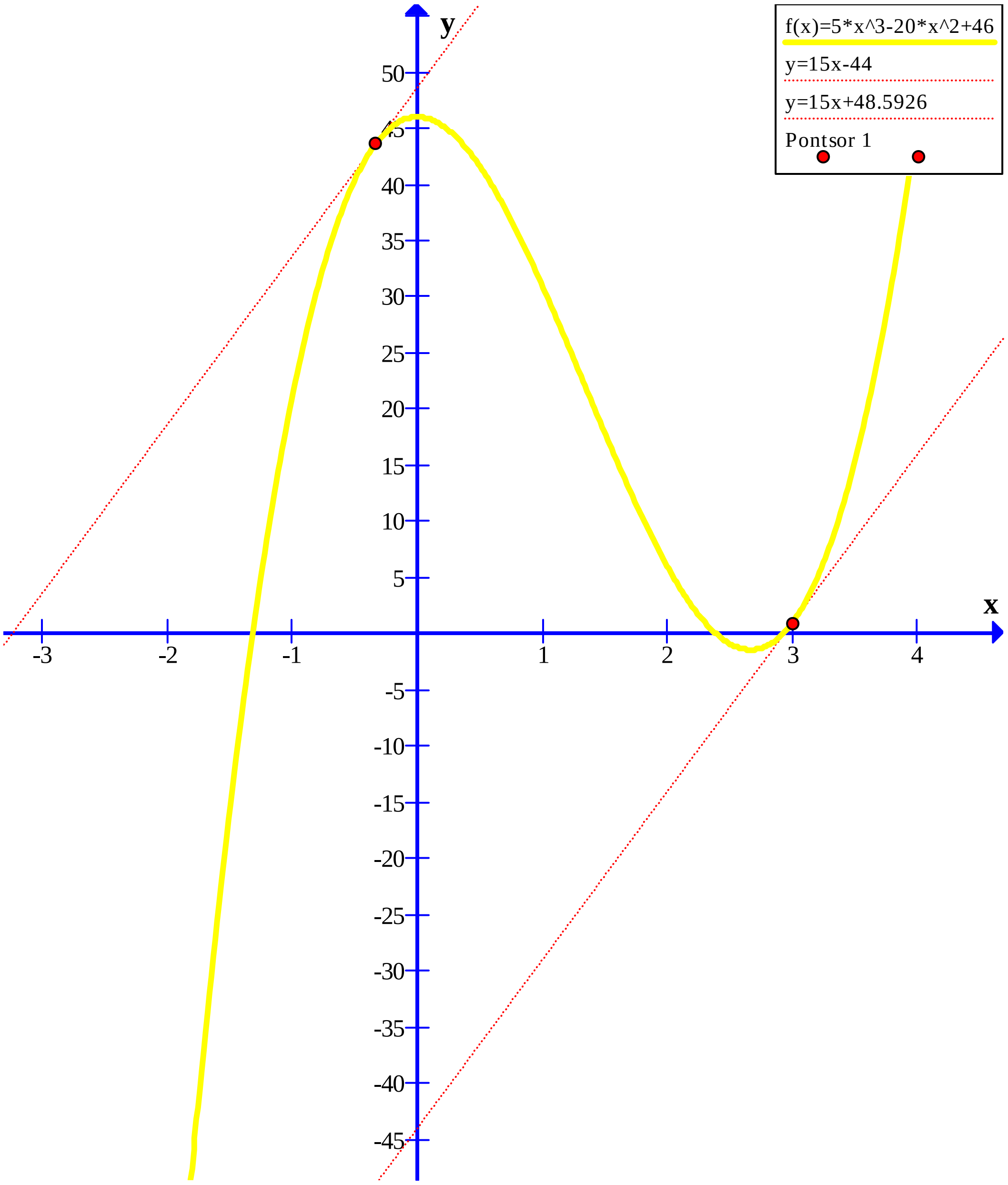
1. Határozza meg az $y = 5x^3 - 20x^2 + 46$ függvény grafikonjának az $y = 15x + 2011$ egyenessel párhuzamos érintőit!

Megoldás:



A megadott egyenes meredeksége 15, tehát keresünk a függvény grafikonján olyan pontokat amelyekben a derivált értéke = 15

$y' = 15x^2 - 40x$, keressük azokat az x-eket ahol $y' = 15x^2 - 40x = 15$, azaz $15x^2 - 40x = 15$, innen $15x^2 - 40x - 15 = 0$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{1600+900}}{30} \qquad x_1=3,\ x_2=-\frac{1}{3}$$

Tehát két lehetséges hely pont $x_1=3$ és $x_2=-\frac{1}{3}$. Meg kell határozni ezekben a pontokban a függvény értékét. $f(x_1)=5\cdot 3^3-20\cdot 3^2+46=1$,

$$f(x_2)=5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3-20\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+46=43,59$$

Tehát az egyik pont $P_1=(3;1)$ a másik pont $P_2=\left(-\frac{1}{3};43.59\right)$

A függvény egy adott x_0 értékéhez tartozó pontján átmenő érintő egyenlete:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, , de jelene esetben éppen úgy határoztuk meg a pontokat, hogy $f'(x_0)=15$

behelyettesítve $x_1=3$, az érintő egyenlete: $y-1=15(x-3)$, azaz $\boxed{y=15x-44}$,

behelyettesítve $x_2=-\frac{1}{3}$, az érintő egyenlete: $y-43.59=15\left(x+\frac{1}{3}\right)=15x+5$, azaz $\boxed{y=15x+48,59}$,

---

2. Határozza meg következő függvények deriváltját!

$$f(x)=\sqrt[3]{4x^{-2}+2^x+tg3x}, \qquad g(x)=\frac{\left(x^3+e^{3x}\right)\ln 8x}{\cos 2x+10}$$

Megoldás:

a. $f(x)=\sqrt[3]{4x^{-2}+2^x+tg3x}$, $f'(x)=\frac{1}{3}\left(4x^{-2}+2^x+tg3x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-8x^{-3}+\ln 2\cdot 2^x+\frac{1}{(\cos 3x)^2}\cdot 3\right)$

b. $g(x)=\frac{\left(x^3+e^{3x}\right)\ln 8x}{\cos 2x+10}$

$$g'(x)=\frac{\left[\left(3x^2+3e^{3x}\right)\ln 8x+\left(x^3+e^{3x}\right)\frac{8}{8x}\right](\cos 2x+10)-\left[\left(x^3+e^{3x}\right)\ln 8x\right](-2\sin 2x)}{(\cos 2x+10)^2}$$

---

3. Az ***a*** paraméter mely értéke mellett lesz az alábbi függvény folytonos

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log_3(4+x)-\log_3 4}{x} & ha \quad x<0\\[2ex] x+a & ha \quad x\ge 0\end{cases}$$

Megoldás:

Meg kell vizsgálni a $\dfrac{\log_3(4+x)-\log_3 4}{x}$ függvény bal oldali határértékét az origóban és annak meg kell egyezni az $x+a$ függvény jobb oldali határértékével.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\log_3(4+x)-\log_3 4}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\log_3\dfrac{(4+x)}{4}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\log_3\frac{(4+x)}{4}=\lim_{x\to 0-}\log_3\left[\frac{(4+x)}{4}\right]^{\frac{1}{x}}$$

Először meghatározzuk a logaritmus függvény nélkül a belső függvény határértékét,

$\lim\limits_{x\to 0-}\left[\dfrac{(4+x)}{4}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0-}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$ ez egy $\left(1^{\infty}\right)$ határozatlan alakú határérték melyet

visszavezetünk már ismert határértékre a $t=\dfrac{1}{x}$ helyettesítéssel.

$\lim\limits_{x\to 0-}$ esetén $\lim\limits_{t\to -\infty}$

Tehát $\lim\limits_{x\to 0-}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{4t}\right)^{t}=\lim\limits_{t\to -\infty}\left(1+\dfrac{\frac{1}{4}}{t}\right)^{t}=e^{\frac{1}{4}}$

Az eredeti függvény határértéke tehát $\log_3\left(e^{\frac{1}{4}}\right)=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{4}}}{\ln 3}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\ln 3}=\dfrac{1}{4\ln 3}$

Tehát $a=\dfrac{1}{4\ln 3}$

---

4. Határozza meg az $y=\sqrt{10x}$ parabolának azt a pontját, amelyik a $(12,0)$ koordinátájú ponthoz a legközelebb van

Megoldás:

A parabola egy tetszőleges pontjának $\left(x,\sqrt{10x}\right)$ és a $(12,0)$ pontnak a távolsága:

$d=\sqrt{(x-12)^2+\left(\sqrt{10x}-0\right)^2}=\sqrt{(x-12)^2+10x}=\sqrt{x^2-14x+144}$,

$d'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-14x+144}}(2x-14)$, $d'=0$, ha $x=7$, tehát a $\left(7,\sqrt{70}\right)$ pontja van a legközelebb az adott ponthoz.