

1. Határozza meg az  $f(x) = \det \mathbf{A}$  kétváltozós valós függvény szélsőértékeinek helyét és minőségét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x-1 & y & x & y \\ x & y & x & y \\ x+1 & y & 1 & x-1 \\ 2 & x+y & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Adja meg ezeken a helyeken a mátrix sajátértékeit és a negatív sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat! (15 pont)

2. Jelölje  $I_n$  a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{x^3}{3}\mathbf{i} + \frac{y^3}{3}\mathbf{j} + (\ln z)\mathbf{k}$  vektor-vektorfüggvény felületi integráljait az  $x^2 + y^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), a  $z = 1$  és a  $z = 2$  felületek által határolt  $\mathcal{F}_n$  felületeken kifelé mutató normálvektorokkal! Számítsa ki az  $[I_n]$  sorozat határértékét! (15 pont)

3. Számítsa ki az  $x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$  differenciálegyenlet  $y(1) = y'(1) = 1$  kezdeti feltételekhez tartozó  $y(x)$  partikuláris megoldását! Legyen  $f(x) = y(x)$ , ha  $x \in [\pi, 3\pi]$  és  $f(x + 2\pi) = f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Adja meg  $f$  Fourier-sorát! Milyen  $x$  helyeken állítja elő a Fourier-sor az  $f$  függvényt? (15 pont)

4. A  $\xi$  folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^4 + x^2}, & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különb.} \end{cases}$$

Határozza meg az  $a$  paraméter értékét és  $\xi$  eloszlásfüggvényét! Számítsa ki  $\xi$  várható értékét és szórását! (15 pont)