

1.

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - x + 3y$$

$$u'_x = x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = 1$$

$$u'_y = x^2 + 2xy + 3 = 0, \text{ és a két sor különbségéből } y^2 = 4$$

Így a következő értékek adódnak:

$$\begin{array}{cccc} x + y = 1 & x + y = -1 & x + y = 1 & x + y = -1 \\ y = 2 & y = 2 & y = -2 & y = -2 \\ P_1(-1, 2) & P_2(-3, 2) & P_3(3, -2) & P_4(1, -2) \\ D(x, y) = -4y(x + y) : & -8 & -8 & 8 & 8 \\ u''_{xx} = 2(x + y) : & 2 & -2 & 2 & -2, \end{array}$$

$$\text{ahol } D(x, y) = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x + 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x \end{vmatrix}.$$

Így P_1 -ben és P_2 -ben nincs szélsőérték, mert ott $D(x, y) < 0$, $P_3(3, -2)$ -ben minimum van, mert ott $D(x, y) > 0$ és $u''_{xx} > 0$, $P_4(1, -2)$ -ben pedig maximum, mert ott $D(x, y) > 0$ és $u''_{xx} < 0$.Nincs olyan komplex reguláris függvény, amelynek valós vagy képzetes része $u(x, y)$ lenne, ugyanis

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 4x + 2y \neq 0.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}. \text{ Az } \mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{c} \text{ egyenlet megoldása:}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -c \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -c \\ 0 & 7 & -7 & 3 + 2c \\ 0 & 14 & -14 & 4 + 5c \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -c \\ 0 & 7 & -7 & 3 + 2c \\ 0 & 0 & 0 & -2 + c \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ha $c \neq 2$, akkor nincs megoldás. Ha $c = 2$, akkor tovább:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

egy $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$ irányvektorú e egyenes vektoregyenlete.A $z = x^2 + y^2$ felület érintősíkjának normálvektora az (x_0, y_0, z_0) pontjában $\mathbf{n} = (-2x_0, -2y_0, 1)$. A sík merőleges az e egyenesre, ha $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v}$, azaz egyik a másiknak skalárszorosa, tehát $-2x_0 = -1, -2y_0 = 1$. Ebből

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{2}, \quad z_0 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{2},$$

tehát a $P_0(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -beli érintősíkról van szó. Ennek normálvektora $\mathbf{n} = (-1, 1, 1)$, egyenlete pedig

$$\begin{aligned} -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) &= 0, \text{ azaz} \\ 2x - 2y - 2z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

$$3. I_n = \oint_{\mathcal{F}_n} \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = \iiint_{V_n} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq n - \sqrt{n^2 - 1}} 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \, dx \, dy \, dz,$$

gömbi koordinátákkal:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{n - \sqrt{n^2 - 1}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3r^2 (r^2 \sin \vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \int_0^{n - \sqrt{n^2 - 1}} \int_0^\pi 6\pi r^4 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dr = \\ &= \int_0^{n - \sqrt{n^2 - 1}} \left[-6\pi r^4 \cos \vartheta \right]_0^\pi = \int_0^{n - \sqrt{n^2 - 1}} 12\pi r^4 \, dr = \left[\frac{12}{5} \pi r^5 \right]_0^{n - \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{12}{5} \pi (n - \sqrt{n^2 - 1})^5. \end{aligned}$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} I_n(z+i)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{5} \pi (n - \sqrt{n^2 - 1})^5 (z+i)^n$ sor konvergenciaközéppontja $-i$, konvergenciasugara pedig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 - 1})^5 (n + \sqrt{n^2 - 1})^5 \left((n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1} \right)^5}{\left((n+1) - \sqrt{(n+1)^2 - 1} \right)^5 \left((n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1} \right)^5 (n + \sqrt{n^2 - 1})^5} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left((n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1} \right)^5}{(n + \sqrt{n^2 - 1})^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}} \right)^5}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)^5} = \frac{2^5}{2^5} = 1.$$

4.

$$y''' - y'' + y' - y = 2e^x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$m^3 - m^2 + m - 1 = 0$$

$$(m-1)(m-i)(m+i) = 0$$

$$c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, próbafüggvénnyel:

$$\begin{aligned} y_p &= A x e^x \\ y_p' &= A(x+1)e^x & A((x+3) - (x+2) + (x+1) - x)e^x &= 2e^x \\ y_p'' &= A(x+2)e^x & 2Ae^x &= 2e^x \\ y_p''' &= A(x+3)e^x & A &= 1 \end{aligned}$$

Az általános megoldás:

$$y = x e^x + c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Ebből:

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)e^x + c_1 e^x - c_2 \sin x + c_3 \cos x & y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y'' &= (x+2)e^x + c_1 e^x - c_2 \cos x - c_3 \sin x & y'(0) &= 1 + c_1 + c_3 = 1 \\ & & y''(0) &= 2 + c_1 - c_2 = 2 \end{aligned}$$

Ennek egyetlen megoldása: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, ezért a keresett megoldás

$$y(x) = x e^x, \text{ és ezzel}$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x e^x & \text{ha } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{ha } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Ez valóban sűrűségfüggvény, mert nemnegatív, véges sok ponttól eltekintve folytonos, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [(x-1)e^x]_0^1 = 1.$$

Az eloszlásfüggvény:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \int_0^x t e^t dt = [(t-1)e^t]_0^x = (x-1)e^x + 1 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - 2 \approx 0.72$$

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx = \int_0^1 x^3 e^x dx = [x^3 e^x]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx = e - 3(e-2) = -2e + 6 \approx 0.56$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = (-2e + 6) - (e-2)^2 = -e^2 + 2e + 2$$

$$D(\xi) = \sqrt{-e^2 + 2e + 2} \approx 0.22.$$