

1. Gauss-Osztrogradszkij-tétellel: $\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV$.

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (2x, xy, -z)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x, y, z) = 2 + x - 1 = x + 1$$

Hengerkoordinátákkal:

A két felület: $m = \frac{10}{1+r^2}$ és $m = r^2 - 8$.

A metszésvonaluk:

$$\frac{10}{1+r^2} = r^2 - 8$$

$$r^4 - 7r^2 - 18 = 0$$

$$(r^2 - 9)(r^2 + 2) = 0$$

$$r^2 = 9 \quad \text{vagy} \quad r^2 = -2$$

$$r = 3 \quad \text{lehetetlen}$$

A tartomány határai: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $r^2 - 8 \leq m \leq \frac{10}{1+r^2}$, $0 \leq r \leq 3$.

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV &= \int_0^3 \int_{r^2-8}^{\frac{10}{1+r^2}} \int_0^{2\pi} (1+r \cos \varphi) r \, d\varphi \, dm \, dr = \int_0^3 \int_{r^2-8}^{\frac{10}{1+r^2}} [r^2 \sin \varphi + r\varphi]_0^{2\pi} \, dm \, dr = \\ &= \int_0^3 \int_{r^2-8}^{\frac{10}{1+r^2}} 2\pi r \, dm \, dr = \int_0^3 \pi \cdot \left(\frac{20r}{1+r^2} - 2r^3 + 16r \right) \, dr = \left[\pi \cdot (10 \ln(1+r^2) - \frac{1}{2}r^4 + 8r^2) \right]_0^3 = \\ &= \pi \cdot (10 \ln 10 + \frac{63}{2}). \end{aligned}$$

2. a) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$.

Sajátértékek: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol $t \neq 0$.

b) $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \implies (A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c) Az $y + z = 0$ sík vektorai: $\begin{bmatrix} s \\ t \\ -t \end{bmatrix}$, ahol $s, t \in \mathbf{R}$ tetszőleges.

$$A \cdot \begin{bmatrix} s \\ t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 3t \\ -s - 2t \\ s + 2t \end{bmatrix},$$

és ez kielégíti a sík egyenletét: $-s - 2t + s + 2t = 0$.

3. $\mathbf{r}(t) = (3t, 1, 2t\sqrt{t})$.

a) $\mathbf{r}(t_0) = (3t_0, 1, 2t_0\sqrt{t_0})$

Az $x - z = 0$ sík normálvektora: $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$.

$\mathbf{r}(t_0)$ -ból a síkra bocsátott merőleges egyenes:

$$x = 3t_0 + t$$

$$y = 1$$

$$z = 2t_0\sqrt{t_0} - t$$

A síkkal vett metszéspontja:

$$3t_0 + t - 2t_0\sqrt{t_0} + t = 0$$

$$t = -\frac{2}{3}t_0 + t_0\sqrt{t_0}$$

$$P_0 \left(\frac{3}{2}t_0 + t_0\sqrt{t_0}, 1, \frac{3}{2}t_0 + t_0\sqrt{t_0} \right).$$

A vetületgörbe egyenlete:

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{3}{2}t + t\sqrt{t}, 1, \frac{3}{2}t + t\sqrt{t} \right).$$

b) I. megoldás:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{t}, 0, \frac{3}{2} + \sqrt{t} \right)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(9) = (3, 0, 9)$$

$$|\dot{\mathbf{u}}(9)| = |(6, 0, 6)| = 6 \cdot |(1, 0, 1)| = 6\sqrt{2}$$

II. megoldás (az a) rész nélkül):

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (3, 0, 3\sqrt{t})$$

$$\dot{\mathbf{r}}(9) = (3, 0, 9)$$

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{r}}(9)$ vetületének hossza a síkon:

$$\sqrt{\mathbf{a}^2 - \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right)^2} = \sqrt{90 - 18} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

c)

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (3, 0, 3\sqrt{t})$$

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{9 + 9t} = 3\sqrt{t+1}$$

$$s = \int_0^t 3\sqrt{\tau+1} d\tau = \left[2(\tau+1)^{3/2} \right]_0^t = 2(t+1)^{3/2} - 2$$

$$t = \left(\frac{s}{2} + 1 \right)^{2/3} - 1$$

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 \left(\left(\frac{s}{2} + 1 \right)^{2/3} - 1 \right), 1, 2 \cdot \left(\left(\frac{s}{2} + 1 \right)^{2/3} - 1 \right)^{3/2} \right).$$

4. $y''' - 4y'' + 4y' = 8, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 2 + 2\alpha, \quad y''(0) = 4\alpha.$

A homogén differenciálegyenlet megoldása:

$$m^3 - 4m^2 + 4m = 0$$

$$m(m-2)^2 = 0$$

$$c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_p = Ax$$

$$y_p' = A \quad 4A = 8$$

$$y_p'' = 0 \quad A = 2$$

$$y_p''' = 0 \quad \Rightarrow y_p = 2x$$

Az általános megoldás:

$$y = 2x + c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}.$$

Ebből

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = \alpha \\ y'(0) &= 2 + 2c_2 + c_3 = 2 + 2\alpha \\ y''(0) &= 4c_2 + 4c_3 = 4\alpha \end{aligned}$$

Ennek a megoldása: $c_1 = 0, \quad c_2 = \alpha, \quad c_3 = 0$, ezért a keresett függvény

$$y(x) = 2x + \alpha e^{2x}.$$

A második kérdés megoldása: $y(2) = 4 + e^4 \alpha$, így $P(y(2) \in (6, 8)) = P(6 < 4 + e^4 \alpha < 8) =$

$$= P(2e^{-4} < \alpha < 4e^{-4}) = F_\alpha(4e^{-4}) - F_\alpha(2e^{-4}) = \Phi\left(\frac{4e^{-4} - 0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2e^{-4} - 0}{2}\right) = \Phi(2e^{-4}) - \Phi(e^{-4}).$$