Sztochasztikus folyamatok
11. feladatsor
Brown mozgás I.

11.1 Legyen X $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a > 0$ esetén

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}.$$

Útmutatás: Használjuk az $\int_a^\infty e^{-x^2/2} dx \leq \int_a^\infty a^{-ax/2} dx$ egyenlőtlenséget.

Megjegyzés: Ez a felső korlát egy 2-es szorzó faktorral gyengébb a val.szám.1. során bizonyítottnál.

11.2 Legyenek $X_1^n, X_2^n, \ldots, X_n^n$ független, 0 várható értékű és $1/n$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változók és

$$W_{j/n}^n := X_1^n + X_2^n + \cdots + X_j^n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

(a) Számoljuk ki a $W_{j/n}^n$ $j = 1, 2 \ldots, n$, valószínűségi változók várható értékeit és kovarianciáit.

(b) Mi lesz a $W_{j/n}^n$, $j = 1, 2 \ldots, n$, valószínűségi változók együttes eloszlása?

(c) Legyen

$$M_n := \max \{|X_1^n|, |X_2^n|, \ldots, |X_n^n|\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) = 0.$$

(*Útmutatás:* használjuk a z 1. feladatban bizonyított egyenlőtlenséget.)

Értelmezzük az eredményt.

11.3 Legyenek $X_1^n, X_2^n, \dots, X_n^n$ független, $1/n$ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változók és

$$Y_{j/n}^n := X_1^n + X_2^n + \dots + X_j^n, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

(a) Számoljuk ki az $Y_{j/n}^n$, $j = 1, 2 \dots, n$,valószínűségi változók várható értékeit és kovarianciáit.

(b) Mi lesz a $Y_{j/n}^n$, $j = 1, 2 \dots, n$, valószínűségi változók együttes eloszlása?

(c) Legyen

$$M_n := \max \left\{ |X_1^n|, |X_2^n|, \dots, |X_n^n| \right\}.$$

Rögzített $\varepsilon \in (0, 1)$ mellett számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P} \left(M_n \geq \varepsilon \right)$$

határértéket. Értelmezzük az eredményt.

11.4 (a) Legyenek $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ nulla várható értékű valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy akkor és csak akkor *együttesen* normális eloszlásúak, ha léteznek $X_1, X_2, \dots, X_n$ *független* $N(0, 1)$ (standard normális) eloszlású valószínűségi változók és a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$ valós számok, úgy hogy

$$Y_j = a_{j1} X_1 + a_{j2} X_2 + \dots + a_{jn} X_n.$$

(b) Legyen X_t standard Brown mozgás ás $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$. Magyarázzuk meg, hogy miért következik a Brown mozgás értelmezéséből, hogy $X_{s_1}, X_{s_2}, \dots, X_{s_n}$ együttesen normális eloszlásúak.

(c) Határozzuk meg az $X_{s_1}, X_{s_2}, \dots, X_{s_n}$ valószínűségi változók kovariancia mátrixát.

11.5 **A Brown mozgás skála invarianciája.** Legyen X_t standard Brown mozgás és $Y_t := a^{-1/2} X_{at}$, ahol $a > 0$ rögzített konstans. Bizonyítandó, hogy Y_t is standard Brown mozgás.

11.6 **A Brown mozgás időinverziója.** Legyen X_t standard Brown mozgás és $Y_t := t X_{1/t}$. Bizonyítandó, hogy Y_t is standard Brown mozgás.

11.7 Legyen X_t standard Brown mozgás. Határozzák meg – lehetőleg szenvedés nélkül – a

$$\mathbf{P}(X_2 > 0 | X_1 > 0)$$

feltételes valószínűséget. Függetlenek-e az $\{X_1 > 0\}$ és $\{X_2 > 0\}$ események?

11.8 Legyenek X_t és Y_t *független* standard egy dimenziós Brown mozgások. Bizonyítsák be, hogy $Z_t := X_t - Y_t$ szintén egy dimenziós Brown mozgás. Mennyi a Z_t Brown mozgás szórás (σ) paramétere?