NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

ELŐADÓ: Pete Gábor GYAKVEZ.:................................

Valószínűségszámítás Vizsga1, 2013. dec. 23.

Munkaidő: 100 perc. Kalkulátor nem használható.

Elm. 1 (a) Mi az, hogy egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, azaz mi ez a három hozzávaló, mik a definiáló tulajdonságaik? **(7 p)** ı

(b) Mi az, hogy diszkrét, és mi az, hogy (abszolút) folytonos valószínűségi változó? **(4 p)**

(c) Mit jelent az, hogy az $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók függetlenek? **(3 p)**

(d) Igazold független valószínűségi változókra, hogy várható értékük összeszorzódik, szórásnégyzetük összeadódik: $\mathbb{E}[XY] = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$ és $\mathbb{D}^2[X+Y] = \mathbb{D}^2 X + \mathbb{D}^2 Y$. Lehet diszkrétekre vagy folytonosakra, ahogy tetszik. **(7 p)**

Elm. 2 (a) Definiáld a $\mathsf{Binom}(n,p)$ eloszlást! Valamelyik tanult módszerrel számold ki várható értékét és szórását. **(7 p)**

(b) Írd föl az $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ normális változó sűrűségfüggvényét, és igazold, hogy tényleg egy sűrűségfüggvény. **(7 p)**

(c) Tekintsük a 100-dimenziós egységoldalú hiperkocka csúcsait: $\{0,1\}^{100} \subset \mathbb{R}^{100}$. Válasszunk a csúcsok közül egyet egyenletesen, legyen ez U. Mi körülbelül a valószínűsége, hogy U legalább kétszer olyan távol van a $(0,\dots,0)$ ponttól (az euklideszi metrikában) mint az $(1,\dots,1)$-től? *(Tipp: standard normális táblázat a hátoldalon.)* **(9 p)**

Elm. 3 (a) Igazold, hogy az $\mathsf{Exp}(\lambda)$ eloszlás momentumgeneráló függvénye $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, ahol $t \in (-\infty, \lambda)$. **(5 p)**

(b) Számold ki az $\mathsf{Exp}(\lambda)$ eloszlás k-adik momentumát, $k = 0, 1, 2, \dots$. **(5 p)**

Gyak. 1 **(Karácsonyi feladat)** Nagykovácsi fölött ritkán, de azért szoktak látni Öldöklő illetve Bőséghozó Angyalokat, két, egymástól független Poisson folyamat szerint, 120 évente várható értékben egyet-egyet. Nagykovácsi dédnagyapám igen egészségesen él, most 147 éves, és csak a következő Öldöklő Angyal felbukkanásakor fog meghalni.

(a) Mi a valószínűsége, hogy dédnagyapám megéri a 200. születésnapját? **(3 p)**

(b) Várható értékben hány Bőséghozó Angyalt fog dédnagyapám a hátralevő életében látni? **(7 p)**

(c) Dédnagyapám példamutató élete fölkeltette az Ördög figyelmét, aki üzletet ajánl a lelkéért: ahány éves korában meghal (ez lehet törtszám is), azt annyiadik hatványra emelik ahány Bőséghozó Angyal elrepült Nagykovácsi fölött életének utolsó éve alatt, és ennyi dukátot kap a dédnagyapám által meghatározott jótékony cél. Ha elfogadja az üzletet, várható értékben mekkora összeggel gazdagszik az a cél? *(Tipp: használd az* Elm. 3 *feladatot.)* **(8 p)**

Gyak. 2 Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független $\mathsf{Egyenletes}[0,1]$ eloszlású pontok. Sorbarendezzük őket, kapjuk az $X_1^* < \cdots < X_n^*$ sorozatot.

(a) Legyen $n = 2$. Határozd meg X_1^* és X_2^* kovarianciáját. **(15 p)**

(b) Most legyen $n = 2k+1$. Írd fel a középső X_{k+1}^* pont sűrűségfüggvényét. **(6 p)**

(c) Igazold, hogy minden $\epsilon > 0$-ra, $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\big[|X_{k+1}^* - 1/2| > \epsilon\big] = 0$. *(Tipp: használd a Bernoulli Nagy Számok Törvényét.)* **(7 p)**

NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

ELŐADÓ: Pete Gábor GYAKVEZ.:.................................

Valószínűségszámítás Vizsga1, 2013. dec. 23.
Munkaidő: 100 perc. Kalkulátor nem használható.

Elm. 1 (a) Mi az, hogy egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, azaz mi ez a három hozzávaló, mik a definiáló tulajdonságaik? **(7 p)**

(b) Mi az, hogy diszkrét, és mi az, hogy (abszolút) folytonos valószínűségi változó? **(4 p)**

(c) Mit jelent az, hogy az $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók függetlenek? **(3 p)**

(d) Igazold független valószínűségi változókra, hogy várható értékük összeszorzódik, szórásnégyzetük összeadódik: $\mathbb{E}[XY] = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$ és $\mathbb{D}^2[X+Y] = \mathbb{D}^2X + \mathbb{D}^2Y$. Lehet diszkrétekre vagy folytonosakra, ahogy tetszik. **(7 p)**

Elm. 2 (a) Definiáld a $\mathsf{Binom}(n, p)$ eloszlást! Valamelyik tanult módszerrel számold ki várható értékét és szórását. **(7 p)**

(b) Írd föl az $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ normális változó sűrűségfüggvényét, és igazold, hogy tényleg egy sűrűségfüggvény. **(7 p)**

(c) Tekintsük a 100-dimenziós egységoldalú hiperkocka csúcsait: $\{0, 1\}^{100} \subset \mathbb{R}^{100}$. Válasszunk a csúcsok közül egyet egyenletesen, legyen ez U. Mi körülbelül a valószínűsége, hogy U legalább kétszer olyan távol van a $(0, \dots, 0)$ ponttól (az euklideszi metrikában) mint az $(1, \dots, 1)$-től? *(Tipp: standard normális táblázat a hátoldalon.)* **(9 p)**

Elm. 3 (a) Igazold, hogy az $\mathsf{Exp}(\lambda)$ eloszlás momentumgeneráló függvénye $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, ahol $t \in (-\infty, \lambda)$. **(5 p)**

(b) Számold ki az $\mathsf{Exp}(\lambda)$ eloszlás k-adik momentumát, $k = 0, 1, 2, \dots$. **(5 p)**

Gyak. 1 **(Karácsonyi feladat)** Nagykovácsi fölött ritkán, de azért szoktak látni Öldöklő illetve Bőséghozó Angyalokat, két, egymástól független Poisson folyamat szerint, 120 évente várható értékben egyet-egyet. Nagykovácsi dédnagyapám igen egészségesen él, most 147 éves, és csak a következő Öldöklő Angyal felbukkanásakor fog meghalni.

(a) Mi a valószínűsége, hogy dédnagyapám megéri a 200. születésnapját? **(3 p)**

(b) Várható értékben hány Bőséghozó Angyalt fog dédnagyapám a hátralevő életében látni? **(7 p)**

(c) Dédnagyapám példamutató élete fölkeltette az Ördög figyelmét, aki üzletet ajánl a lelkéért: ahány éves korában meghal (ez lehet törtszám is), azt annyiadik hatványra emelik ahány Bőséghozó Angyal elrepült Nagykovácsi fölött életének utolsó éve alatt, és ennyi dukátot kap a dédnagyapám által meghatározott jótékony cél. Ha elfogadja az üzletet, várható értékben mekkora összeggel gazdagszik az a cél? *(Tipp: használd az* Elm. 3 *feladatot.)* **(8 p)**

Gyak. 2 Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független $\mathsf{Egyenletes}[0, 1]$ eloszlású pontok. Sorbarendezzük őket, kapjuk az $X_1^* < \cdots < X_n^*$ sorozatot.

(a) Legyen $n = 2$. Határozd meg X_1^* és X_2^* kovarianciáját. **(15 p)**

(b) Most legyen $n = 2k + 1$. Írd fel a középső X_{k+1}^* pont sűrűségfüggvényét. **(6 p)**

(c) Igazold, hogy minden $\epsilon > 0$-ra, $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\big[|X_{k+1}^* - 1/2| > \epsilon\big] = 0$. *(Tipp: használd a Bernoulli Nagy Számok Törvényét.)* **(7 p)**

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000