Sztochasztikus modellek — házi feladatok

Pete Gábor
http://www.math.bme.hu/~gabor

2013. március 24.

▷ **Gyakorlat 1.** Az alapfogalmak gyakorlására:
(i) Adjunk példát egy $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ véletlen sorozatra, melyre $\mathbf{E}[\, M_{n+1} \mid M_n \,] = M_n$ teljesül minden $n \geq 0$-ra, de ami nem egy martingál.
(ii) Vegyünk egy tranziens Markov-láncot a V állapottéren, P Markov operátorral. Legyen $\Delta = I - P$ a diszkrét Laplace operátor, és $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges nagyon gyorsan lecsengő függvény. Oldjuk meg a $\Delta u = f$ egyenletet u-ra a $G(x, y) := \sum_{n \geq 0} p_n(x, y)$ Green-függvény segítségével!

▷ **Gyakorlat 2.** Vegyünk egy aszimmetrikus $(X_i)_{i \geq 0}$ bolyongást $\mathbb{Z}$-n: jobbra $p > 1/2$, balra $1 - p$ valószínűséggel lépünk. Találjunk egy r^{X_i} alakú martingált valamilyen $r > 0$-ra, és számoljuk ki a $\mathbf{P}_k[\, \tau_0 > \tau_n \,]$ eltrafálási valószínűségeket (k-ból indulva). Aztán találjunk egy $X_i - \mu\, i$ alakú martingált valamilyen $\mu > 0$-val, és számoljuk ki az $\mathbf{E}_k[\, \tau_0 \wedge \tau_n \,]$ várható időket. (Tipp: az Opcionális Megállási Tétel alkalmazásához a második martingál egyenletes integrálhatósága nem teljesen triviális; mutassuk meg ehhez, hogy a $\tau_0 \wedge \tau_n$ változónak exponenciálisan lecsengő farka van.)

▷ **Gyakorlat 3.** Igazoljuk, hogy tetszőleges összefüggő gráfon való bolyongás (vagy általánosabban, tetszőleges irreducibilis Markov-lánc) $G(x, y|z) := \sum_{n \geq 0} p_n(x, y) z^n$ Green függvényére, tetszőleges x, y, u, v csúcsokra és $z > 0$-ra,

$$G(x, y|z) < \infty \;\Leftrightarrow\; G(u, v|z) < \infty\,.$$

▷ **Gyakorlat 4.** Számoljuk ki a $\rho(\mathbb{T}_{k,\ell})$ spektrálsugarat, ahol $\mathbb{T}_{k,\ell}$ egy bireguláris fa: ha $v_n \in \mathbb{T}_{k,\ell}$ távolsága a gyökértől n, akkor

$$\deg v_n = \begin{cases} k & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \ell & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

▷ **Gyakorlat 5.** A de Moivre-Laplace tétel segítségével bizonyítsuk be, hogy
(i) $\mathbb{Z}$-n az egyszerű bolyongó várható távolsága a kiindulási helyétől $\mathbf{E}\, \mathrm{dist}(X_0, X_n) \asymp \sqrt{n}$.
(ii) Ugyanez a $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ lámpagyújtogató gráfon, de ehhez először igazoljuk a tükrözési elv segítségével a következő lemmát: ha $\mathbb{Z}$-n bolyongásra $M_n := \max\{0 = X_0, X_1, \dots, X_n\}$, akkor

$$\mathbf{P}[\, M_n \geq t \,] \leq 2\mathbf{P}[\, X_n \geq t \,]\,.$$

▷ **Gyakorlat 6.**
(i) Bizonyítsuk, hogy $\mathbb{Z}^2$-en az egyszerű bolyongó által meglátogatott csúcsok várható száma

$$\mathbf{E}|\{X_0, X_1, \dots, X_n\}| \asymp n / \log n\,.$$

(ii) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^2$ lámpagyújtogató gráfon a várható távolság $\mathbf{E}\, \mathrm{dist}(X_0, X_n) \asymp n / \log n$.

▷ **Gyakorlat 7.**

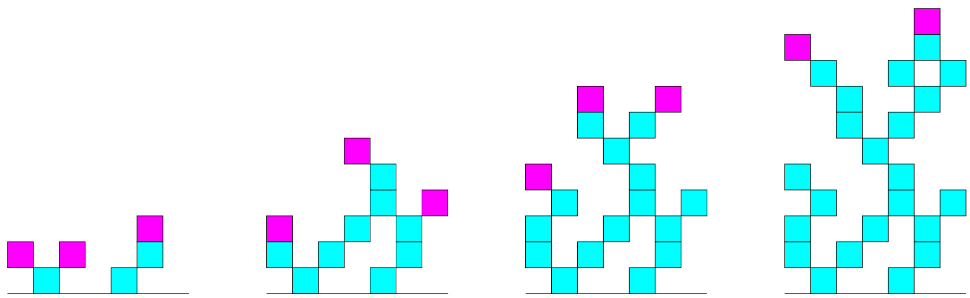
(i) Bizonyítsuk, hogy tetszőleges tranzitív tranziens gráfon,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}|\{X_0, X_1, \dots, X_n\}|}{n} = \mathbf{P}[\, X_k \neq X_0,\ k = 1, 2, \dots] \,.$$

(ii) Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ lámpagyújtogató gráfon, $d \geq 3$, a várható távolság lineárisan nő.

▷ **Gyakorlat 8.** Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ lámpagyújtogató gráfon $p_n(o, o) \geq c_1 \exp(-c_2 n^{1/3})$.

▷ **Gyakorlat 9.** A Tetris játék egy egyszerű változata: a K hosszú diszkrét kör egyenletesen választott véletlen $[i, i+1]$ szakaszaira ($i = 0, 1, \dots, K-1$, mod K értve) egységnégyzetek esnek, amiknek ragacsos a sarka. Legyen R_t a tető mérete t darab négyzet leesése után: azon négyzetek, amik eshettek volna utoljára. Igazoljuk, hogy $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}R_t = K/3$.



Megjegyzés. Ha kétféle kocka esik, részecskék és antirészecskék, melyek kioltják egymást, ha pontosan egymásra esnek, akkor a folyamat egy bolyongás lesz egy csoporton, és a tető méretének a bolyongás sebességéhez van köze. Itt $K \geq 4$-ra már $0.32893K$-nál kisebb a tető várható mérete a limeszben, de ez messze nem triviális. Mi a helyzet $K = 3$-ra?

▷ **Gyakorlat 10.** Legyen (V, P) egy reverzibilis véges Markov lánc, $|V| = n$. Igazoljuk:

(a) Minden λ_i sajátértékre $-1 \leq \lambda_i \leq 1$.

(b) Ha $-1 \leq \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1 = 1$ a sajátértékek, akkor $\lambda_2 < 1$ pontosan akkor ha (V, P) összefüggő (azat a lánc irreducibilis).

(c) $\lambda_n > -1$ pontosan akkor ha (V, P) nem 2 periódusú.

▷ **Gyakorlat 11.** Adjuk meg a C_n^d tóruszon a lusta bolyongás spektrumát.

▷ **Gyakorlat 12.** Tetszőleges (V, P) Markov-láncra egy π stacionárius eloszlással, legyen

$$d(t) := \sup_{x\in V} d_{\mathrm{TV}}\big(p_t(x, \cdot), \pi(\cdot)\big) \quad \text{és} \quad \bar{d}(t) := \sup_{x,y\in V} d_{\mathrm{TV}}\big(p_t(x, \cdot), p_t(y, \cdot)\big) \,.$$

(a) Igazoljuk, hogy $d(t) \leq \bar{d}(t) \leq 2d(t)$.

(b) A TV-távolság csatolásos karakterizációját felhasználva igazoljuk, hogy $\bar{d}(t + s) \leq \bar{d}(t)\, \bar{d}(s)$.

(c) A TV keverési időre és minden $\ell \in \mathbb{Z}_+$-ra, $d(\ell\, t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(1/4)) \leq 2^{-\ell}$.

▷ **Gyakorlat 13.** A lusta bolyongásra a $\{0, 1\}^k$ hiperkockán a kupongyűjtögető csatolás segítségével igazoljuk, hogy $d(k \ln k + tk) \leq Ce^{-ct}$ valamilyen $0 < c, C < \infty$ számokra és minden $t > 0$-ra. (Az igazi keverési idő egyébként egy 2-es faktorral jobb ennél, $\sim 1/2\, k \ln k$.)

▷ **Gyakorlat 14.** Föltéve, hogy létezik tranzitív (n, d, c)-expandereknek végtelen sorozata fix $d \in \mathbb{Z}_+$ és $c > 0$-ra, adjunk egy sorozatát d^*-reguláris tranzitív $G_n(V_n, E_n)$ gráfoknak, melyekre $|V_n| \to \infty$, nem egy expander-sorozat, ámde gyorsan kevernek abban az értelemben, hogy $t_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{TV}}(1/4) = O(\log |V_n|)$.

Legyen G_n véges, legfeljebb d fokú gráfok egy sorozata. Vegyünk egy uniform véletlen ρ gyökeret a $V(G_n)$ csúcshalmazból, és körülötte a $B_r(\rho)$ gömböt, valamilyen fix $r \in \mathbb{Z}_+$ sugárra. Kapunk egy $\mu_{n,r}$ eloszlást max d fokú véges gyökeres gráfokon. Azt mondjuk, hogy a G_n sorozat **lokális gyenge** (avagy **Benjamini-Schramm**) **értelemben** tart egy végtelen tranzitív G gráfhoz, ha minden $r \in \mathbb{Z}_+$-ra ez a $\mu_{n,r}$ eloszlás rákoncentrálódik a G gráf r-sugarú gömbjére, amint $n \to \infty$. Például az $\{1, 2 \dots, n\}^d$ rácskockák tartanak a $\mathbb{Z}^d$ rácshoz, míg a $\mathbb{T}_d$ reguláris fa B_n gömbjei nem tartanak $\mathbb{T}_d$-hez.

▷ **Gyakorlat 15.** Igazoljuk hogy egy G végtelen tranzitív gráfhoz pontosan akkor van az ő részgráfjaiból álló hozzá lokális gyengén konvergens sorozat, ha G amenábilis.

▷ **Gyakorlat 16.** Tekintsük az órán vizsgált véletlen d-reguláris páros gráfot $2n$ csúcson: d db független uniform véletlen permutáció unióját (most nem kell megszabadulnunk a párhuzamos élektől, nem fognak zavarni). Nézzük a $B_r(\rho)$ gömb eloszlását, ahol a véletlen most két helyről jön: véletlen gráfban a véletlen gyökér ρ. Igazoljuk, hogy ez az eloszlás rákoncentrálódik a d-reguláris fa r-sugarú gömbjére.

Vegyünk egy GW fát ξ gyerekeloszlással, ahol $\mathbf{E}\xi = \mu$ és $\mathbf{E}[\,\xi^2\,] < \infty$. Az n-edik generáció mérete legyen Z_n. Előadáson vesszük, hogy Z_n/μ^n egy martingál, várható értéke 1, továbbá igazoltuk egy MG konvergencia tétel segítségével, hogy $\mu \le 1$ esetén $Z_n = 0$ minden elég nagy n-re, azaz a fa kihal.

▷ **Gyakorlat 17.** Tegyük most föl, hogy $\mu > 1$. Igazoljuk, hogy $\mathbf{E}\big[\,Z_n^2\,\big] \le C(\mathbf{E}Z_n)^2$ teljesül, és így a Második Momentum Módszer miatt a GW folyamat pozitív valószínűséggel nem hal ki.

▷ **Gyakorlat 18.** Legyen $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy egyszerű szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n, i-ből indulva, $0 < i < h$.
(a) Igazoljuk, hogy ha $\{X_n\}$-et kondícionáljuk a $\{\tau_h < \tau_0\}$ eseményre, akkor egy Markov láncot kapunk. Számoljuk ki az áttérési valószínűségeket.
(b) Igazoljuk, hogy $\mathbf{P}_1[\,\tau_h > \tau_0\,] \asymp \mathbf{P}_1[\,\tau_{ch} > \tau_0\,]$, ha $c > 0$ fix.
(c) A fentiek és az 5. gyakorlat segítégével bizonyítsuk be az előadáson említett eredményt, miszerint

$$\mathbf{P}_1[\,\tau_0 > n\,] \asymp \mathbf{P}_1[\,\tau_{\sqrt{n}} < \tau_0\,] \asymp 1/\sqrt{n}.$$

Megjegyzés: Az előadáson ez nem egyszerű $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ bolyongásra kellett, hanem nulla várható értékű és exponenciálisnál is vékonyabb farkú növekményekre. Ez a kiterjesztés megtehető, de most nem feladat. Egyszerű szimmetrikus bolyongásra egyébként egyszerűbb a tükrözési elv segítségével $\mathbf{P}_0[\,X_{2n} = 0\,] \asymp 1/\sqrt{n}$-re visszavezetni a kérdést, de ez az út nehezebben általánosítható.

▷ **Gyakorlat 19.** Legyen T egy kritikus GW fa $\xi \sim \mathsf{Geom}(1/2)$ gyerekeleloszlással. Rajzoljuk le a fát a síkba, adjunk a ρ gyökérhez egy plusz (ρ, ρ^*) élet, és ρ^*-tól indulva járjuk körül a fát, minden "sarkán" egyszer, minden élén kétszer áthaladva. Minden saroknál írjuk föl a ρ^*-tól vett gráf-távolságot, ez legyen az $\{X_t\}_{t=0}^{2n}$ folyamat, amely $t = 0, 2n$ kivételével mindenhol pozitív, és ahol n az eredeti T fa csúcsainak száma.

(a) Igazoljuk a $\mathsf{Geom}(1/2)$ örökifjú tulajdonságának segítségével, hogy az X_t folyamat egy egyszerű szimmetrikus bolyongás.

(b) Az előző gyakorlat fölhasználásával bizonyítsuk, hogy ha a kritikus $\mathsf{Geom}(1/2)$ GW fát kondícionáljuk arra, hogy magassága legalább n, akkor nagy valószínűséggel a magassága n körül, a teljes mérete n^2 körül lesz (konstans faktoroktól eltekintve).

▷ **Gyakorlat 20.** Bizonyítsuk be a Bollobás-Thomason tételt: ha $\mathcal{A}$ egy növekvő (azaz fölfelé zárt) esemény n biten, és $p^{\mathcal{A}}(t) := \inf\{p : \mathbf{P}_p[\,\mathcal{A}\,] \geq t\}$, akkor minden $\epsilon > 0$-hoz létezik egy n-től és $\mathcal{A}$-tól független C, hogy $p_{1-\epsilon}(n) < Cp_{\epsilon}(n)$. (Tipp: vegyük sok független kópiáját ϵ-sűrűségű halmazoknak.)

▷ **Gyakorlat 21.** Az Erdős-Rényi $G(n,p)$ modellben a háromszög-tartalmazásra nézve pivotális élek számát jelölje piv_n. Igazoljuk, hogy $p = p(n) \asymp 1/n$ esetén $\mathbf{E}_p[\,\mathsf{piv}_n\,] \asymp n$. A Russo-formula segítségével vonjuk le a következtetést, hogy minden $\epsilon > 0$-ra az átcsapási ablak méretére $\Delta_\epsilon(n)n > c > 0$, azaz itt az átcsapás tompa.