

## Ütemterv és napló

Ami már volt, az napló, ami még nem volt, az még csak terv, tehát változhat. A javasolt irodalmak bővíülhetnek, ahogy a tervből napló lesz.

### 1. Mérték- és integrálmélet (szept. 11.):

Sigma-algebra, mérték és integrál, Lebesgue-mérték és -integrál. Fatou lemma, domináns és monoton konvergencia tételek. Fontos mértékelméleti érdekességek: egy [Lebesgue-nemmérhető halmaz](#), illetve a [Banach-Tarski paradoxon](#). (Ezeket érdekességképp mondtam; ha nem értitek pontosan, nem szakad le az ég.) A Cantor halmazzal konstruált szinguláris mérték bevezetése (bővebben a gyakorlatsoron).

- R. B. Ash: *Measure, integration, and functional analysis*
- W. Rudin: *Real and complex analysis*
- Jók az angol Wikipedia szócikkek, pld. [Measure \(mathematics\)](#), [Lebesgue integration](#), meg a fentebb linkeltek.

### 2. Metrikus terek, topológia (szept. 18.): [Metrikus terek](#): definíció, faktor-tér, teljesség. Geometriai, kombinatorikus és függvényteretes példák.

Topológia kezdetei: nyíltság, zárttság, folytonosság, [homeomorfizmus](#).

A  $d$ -dimenziós [topologikus sokaság](#) definíciója,  $S^2$  gömbfelszín és  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  lapos tórusz példákkal, amik nem homeomorfak, mert az egyik [1-összefüggő](#), a másik nem.

Megjegyzés: NEM definiáltam a [topologikus teret](#) általában, mindig csak metrikus terekről beszéltünk.

- A linkelt Wikipedia szócikkek.
- W. Rudin: *Real and complex analysis*
- J. Munkres: *Topology*

### 3. Kompaktság. Topologikus és differenciálható sokaságok (szept. 25.):

A kompaktság alkalmazásai: [véges metszet tulajdonság](#), [Erdős de Bruijn tétel](#), [Banach-Alaoglu tétel](#) a [mértékek gyenge konvergenciájáról](#), pld az [Ising modellben](#).

A kétdimenziós [irányítható és nem-irányítható](#) kompakt topologikus sokaságok Poincaré általi klasszifikációja. [Poincaré sejtés](#).

[Differenciálható sokaságok](#) definíciója. Példák a HF-ben.

- R. B. Ash: *Measure, integration, and functional analysis*
- J. Munkres: *Topology*
- W. M. Boothby: *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*

### 4. Differenciálható sokaságok, vektormezők, Riemann-sokaságok (okt. 2.)

Bemelegítő érdekességek: [Brouwer fixpont-tétel](#), [Sperner lemma](#), a játékelmélet [von Neumann](#) és [Nash egyensúlyi](#) pontjai.

[Exotikus differenciálható gömbök](#) létezésének említése.

[Érintővektorok](#) mint görbék ekvivalenciaosztályai az irány szerinti deriválás szempontjából. Az érintőtér mint a [derivációk](#) vektortere. [Érintőnyaláb](#). Sima [érintővektormező](#) fogalma. Az  $S^2$  gömbfelület  $TS^2$  érintőnyalábja nem lehet globálisan  $S^2 \times \mathbb{R}^2$  alakú, a [sündisznó-tétel](#) miatt.

Diffható sokaságok közötti diffható leképezés pontbeli deriváltja mint érintőterek közötti lineáris leképezés.

[Riemann sokaság](#) definíciója. Példák: (a)  $S^2$  gömb az  $\mathbb{R}^3$ -ba ágyazással öröklött érintőterekkel és rajtuk a belsőszorzással. (b)  $\mathbb{T}^2$  tórusz ugyanígy az  $\mathbb{R}^3$ -ból öröklött metrikával. (c)  $\mathbb{T}^2$  lapos tórusz. (d) Bolyai-féle [hiperbolikus sík](#) Poincaré körlap modellje.

## 5. Ergodelmélet és dinamikai rendszerek (okt. 9. és 16.) Tóth Péter Mogyoró által

Diszkrét idejű mértéktartó dinamikai rendszerek definíciója. Invariáns mérték, ergodikusság fogalma. 0-1-sorozatokon vett eltolás invariáns mértékei. Racionális és irracionális forgatás közötti alapvető különbség: periodikusság versus sűrűség.

Poincaré rekurrencia tétel, von Neumann és Birkhoff ergod-tételek kimondása, két példával: irracionális forgatás egyenletes eloszlása, illetve Nagy Számok Törvénye.

- M. Brin, G. Stuck: Introduction to dynamical systems
- [Ergodelmélet a wikipedián](#).

## 6. Diffgeo 2 (okt. 30.)

Vektormező által generált diffeomorfizmus folyam. [Tenzor-mezők](#). Konnexió, [párhuzamos eltolás](#). [Felületek görbülete](#), Gauss [Theorema Egregiuma](#), és [Riemann görbületi tenzor](#).

- W. M. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry
- V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei

## 7. ÁltRel kiselőadás, illetve Bolyongások, Markov láncok (nov. 6.)

Pólya György tétele (1920):  $\mathbb{Z}^d$ -n bolyongás rekurrens, ha  $d = 1, 2$ , ám tranzienst, ha  $d \geq 3$ . A bizonyítást kis csalással csináltuk végig; a csalás eltüntetéséhez, ha valakit érdekel, a PGG jegyzetemet javasolom alább. Amelletti érvelés, hogy  $d > 2$  az igazi váltás, pld bolyongás végtelen [perkolációs fűrtön](#), „ant in the labyrinth”; ha véletlenül komolyabban érdekel valakit, itt [egy cikkem](#).

[Markov lánc](#) definíciója, stacionárius mérték fogalma, létezése, hozzá való konvergencia. A konvergencia-tételből kifejejtettem az aperiodikusság feltételét, de következő órán elmondom.

$f(x) = \mathbb{P}_x[\tau_a < \tau_z]$  diszkrét harmonikussága, azaz középérték-tulajdonsága. Dirichlet energia definíciója, minimalizálási tulajdonság kimondása (erről jövő héten lesz még szó).

- G. Pete: Probability and geometry on groups, [book in preparation](#), Chapters 1, 6.
- D. Levin, Y. Peres, E. Wilmer: Markov chains and mixing times, [book here](#)
- S. I. Resnick: Adventures in stochastic processes

## 8. Reverzibilis Markov láncok elektromos interpretációja (nov. 13.)

A [reverzibilis Markov-láncok](#) ugyanazok, mint szimmetrikusan élsúlyozott gráfokon való súlyozott bolyongások. A  $c(x, y)$  élsúlyokat él-konduktanciáknak is hívjuk, az  $r(x, y) = 1/c(x, y)$ -okat pedig él-ellenállásoknak, a Markov lánc áttérései pedig

$$p(x, y) = \frac{c(x, y)}{\sum_y c(x, y)}.$$

Vegyük észre, hogy  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  pontosan akkor  $p(x, y)$ -harmonikus egy  $x$  csúcsban, ha  $c(x, y)$ -harmonikus, azaz  $f(x) = \sum_y c(x, y) f(y)$ .

Egy  $G(V, E, c)$  élsúlyozott gráfon a  $\theta : \overleftarrow{E} \rightarrow \mathbb{R}$  antiszimmetrikus függvényeket diszkrét vektormezőknek hívjuk (ahol  $\overleftarrow{E}$  az irányított élek halmaza: minden él mindkét irányítással). Egy ilyen vektormező pontosan akkor egy diszkrét gradiens, azaz

$$\theta(x, y) = (\nabla f)(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{r(x, y)},$$

ha örvénymentes, azaz kielégíti Kirchhoff örvénytörvényét:  $\sum_{(x,y) \in C} \theta(x, y) r(x, y) = 0$  minden irányított  $C$  körre. Egy  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  pedig pontosan akkor  $c$ -harmonikus  $x$ -ben, ha a  $\nabla f$  gradiens kielégíti Kirchhoff folyamtörvényét:  $\sum_y \nabla f(x, y) = 0$ .

Első és második energiainimalizálási elv: az

$$\mathcal{E}(\theta) := \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \overleftarrow{E}} |\theta(x, y)|^2 r(x, y)$$

Dirichlet energiát a Kirchhoff egyik törvényét kielégítő vektormezők közül a másikat is kielégítőket minimalizálják. Ld HF. A [mindkét törvényt](#) kielégítő vektormezőket hívják áramnak.

Következmény (Terry Lyons 1983): ha egy súlyozott gráfon van valamely  $x$  csúcsból a végtelenbe véges energiájú nemnulla folyam, akkor feszültségkülönbség esetén áram is folyik, és így a bolyongás tranzienst. Meg is adunk  $\mathbb{Z}^3$ -ön egy véges energiájú folyamatot.

Az  $\mathbb{R}^d$ -beli [Brown-mozgás](#) avagy [Wiener-folyamat](#) definíciója.

Diszkrét (bolyongás) és folytonos (Brown mozgás) [harmonikus mérték](#) definíciója: az a  $\nu_x$  valószínűségi mérték  $U \subset V$ -n, ami azt tudja, hogy  $U$ -ról  $V$ -re az  $f$  függvény harmonikus kiterjesztését az

$$f(x) = \int_U f(y) d\nu_x(y)$$

integrál adja meg.

- G. Pete: Probability and geometry on groups, [book in preparation](#), Chapter 6.
- D. Levin, Y. Peres, E. Wilmer: Markov chains and mixing times, [book here](#)
- S. I. Resnick: Adventures in stochastic processes

## 9. Szoliton kiselőadás, illetve Komplex függvénytan, Laplace egyenlet (nov 20):

[Holomorficitás](#), Cauchy-Riemann egyenletek, harmonikus függvények. [Konform leképezések](#), Riemann leképezés tétel. Harmonikusság és harmonikus mérték konform-invarianciája. [Laplace-egyenlet](#) Dirichlet probléma megoldása.

- L. Ahlfors: *Complex analysis*
- W. Rudin: *Real and complex analysis*
- L. C. Evans: *Partial differential equations*
- P. Mörters, Y. Peres: *Brownian motion*.

## Javasolt kiselőadás témák

**Időpontok:** november 6, nov 20, december 4.

A megadott linkek csak kedvcsinálók; adok forrást, amikor kéritek. Magyar nyelvű forrást egyik témához se próbáltam találni, de elképzelhető, hogy valamelyikhez létezik; próbálok segíteni, ha valaki igényli. Értelemszerűen inkább a lista elején vannak olyan témák, amiket már az első beszámolón megérthetnek az előadók és a hallgatók. Hozhattok saját témát is.

1. Kompaktsági tételek: [Arzelà-Ascoli](#) és/vagy [Tyihonov-tétel](#) és/vagy [Banach-Alaoglu](#) (topológia és funkcionál)
2. Topologikus fix-pont tételek (Brouwer, [Borsuk-Ulam](#)) kombinatorikus és játékelméleti alkalmazásai. Lásd a naplóbeli linkeket, plusz [ezt a mesét](#) és/vagy [ezt a cikket](#) egy nyaklánc szétosztásáról két rabló között.
3. [Morse elmélet](#) és/vagy két következménye: [Poincaré-Hopf index-tétel](#) és [Gauss-Bonnet tétel](#) (differenciálgeometria)
4. A görbület csodái: a [Gauss-Bonnet tétel](#), vagy, hogy az általános relativitáselmélet mit mond a [téridő görbületéről](#). *Boldoczi Fanni, Lucsányi Dávid, Orosz István, Roberts Vivienne Astra, nov 6.*
5. [Hopf fibráció](#) (differenciálgeometria, Lie-csoportok)
6. [Hausdorff dimenzió](#), önhasonló halmazok, fraktálok (mértékelmélet és geometria)
7. [Julia halmazok](#), Mandelbrot halmaz (komplex függvénytan, dinamikai rendszerek)
8. Entrópia a dinamikai rendszerekben és/vagy statisztikus fizikában és/vagy információelméletben. A [Wikipedia gyűjtő-oldal](#). Pld egyszerű és látványos [Shannon kódolási tétele](#). Vagy pld [entrópia és reverzibilitás](#), de ehhez kell valami matekot is még hozzárakni az ottani linkekből.
9. Fürstenberg ergodelméleti megközelítése [Szemerédi tételének](#)
10. KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) elmélet. A [Wikipedia](#) csak pár szót ír, de vannak további linkek, a [Scholarpedia](#) már jóval többet.
11. [Gauss leképezés](#) és [lánctörtek](#).
12. [Kramers-Kronig relációk](#): egy egyszerű komplex analízis állítás és fizikai interpretációi
13. [Loewner evolúció](#) (a kétdim statfizben fontos [SLE](#) egyik alapja; komplex függvénytan)
14. [Burgers egyenlet](#), esetleg mint [forgalmi dugók hidrodinamikai limesze](#). Itt erről egy [kicsit komolyabb](#) matekos leírás.
15. [Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet](#), optimális kontroll, dinamikus programozás, játékelmélet. *Janecska Máté, Kleizer Gábor, dec 4.*
16. Az  [\$L^\infty\$ -Laplace egyenlet](#) és esetleg véletlen kötélhúzás (egy parcdiff megoldása véletlen játékelmélettel)
17. [Brown-mozgás](#) konstrukciói, alkalmazásai. Egy [jegyzet](#), amit szeretek, itt meg [könyv](#). Esetleg [Gauss-féle szabad mező](#). *Bercsényi Dániel, Nagy Dániel, Seress Mátyás, dec 4.*
18. Bolyongások és elektromos hálózatok: [Doyle-Snell](#), [Lyons-Peres](#), [PGG Sections 6.1-2](#)

19. [Martingálok](#): legjobb jóslat, harmonikusság stb. [Egy híres példa](#). Ld még [PGG Section 6.3](#).
20. Folytonos spinmodellek a síkban: [XY-modell](#), [Mermin-Wagner tétel](#), és egy dinamikus változat: [Vicsek-féle madárvonulás](#) *Lévay Sára, Galambos Tamás, Kovács Péter, Pölöskei Péter, nov 20*.
21. Galton-Watson folyamatok. Lsd. pld. [PGG Section 12.1](#) végefelé, de nem tudom még, hogy mi lesz ebből órán.
22. Valami Markov-láncos. Itt egy [nagy bevezető könyv](#). Órán persze lesz róluk szó. *Böröczki Zoltán, Rudas Csilla, Takács Hajna, dec 4*.
23. Orvosi képzési eljárások matematikai alapjai *Bianco-Molnár Zsanett, Szegedi Domonkos, Székér Péter, dec 4*.

## Házi feladatok

Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat, 2015 őszi

Hetente kábé 12 pontnyi feladat van kitűzve, mindegyik beadandó. A feladat annyi pontot ér, ahány • van mellette. Részpontoszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. A piros • pontok bónusz feladatokat jelölnek.

1. HF: (Beadási határidő: 2015. szept. 19.)

**Definíció:** Ahogyan a  $\lambda$  Lebesgue-mértékből definiáltuk lépcsős függvényeken keresztül tetszőleges Lebesgue-mérhető  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$  integrálját, ugyanúgy tetszőleges  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  mértéktéren lehet tetszőleges  $\mathcal{F}$ -mérhető  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvény

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) d\mu(\omega)$$

integrálját is definálni. Amikor  $\mu$  egy valószínűségi mérték, akkor a mérhető  $\xi$ -ket valószínűségi változónak hívtuk, az integrált  $\mathbb{E}\xi$  várható értéknek, az  $F_{\xi}(x) := \mu(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\})$  függvényt pedig eloszlásfüggvénynek.

Amikor  $\Omega = \mathbb{R}$ -en nézünk mértékeket, akkor a  $\sigma$ -algebra leggyakrabban a **Borel  $\sigma$ -algebra**  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ : a legkisebb  $\sigma$ -algebra, ami tartalmazza az összes intervallumot (azaz kicsit kisebb, mint a Lebesgue-féle, mert ott hozzávettük a nullmértékűek összes részhalmazát is).

HF 1.1 •• A **Dirac delta mérték** az  $a \in \mathbb{R}$  pontban:  $\delta_a(B) = 1$  ha  $a \in B$ , különben  $\delta_a(B) = 0$ , minden  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  Borel-mérhető halmazra. Igazoljuk, hogy  $\delta_a$  valóban egy valószínűségi mérték. Ha  $g$  egy folytonos függvény, mennyi  $\int_{\mathbb{R}} g(x) d\delta_a(x)$ ?

**Definíció:** Legyenek  $\mu_n$  valószínűségi mértékek  $\mathbb{R}$ -en,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ -re. Két szokásos definíciója valszín mértékek konvergenciájának: **gyengén konvergálnak**, jelölése  $\mu_n \Rightarrow \mu_{\infty}$ , ha tetszőleges folytonos korlátos  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_{\infty}(x).$$

**Teljes variációs távolságban** konvergálnak, ha  $d_{TV}(\mu_n, \mu_{\infty}) \rightarrow 0$ , ahol

$$d_{TV}(\mu, \nu) := \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mu(B) - \nu(B)|.$$

HF 1.2 (a) •• Legyen  $\mu_n$  sűrűségfüggvénye az órán látott magas és keskeny sátor:  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(1/n) = n$ ,  $f_n(2/n) = 0$ , törtlineárisan kiterjesztve. Igazoljuk, hogy  $\mu_n \Rightarrow \delta_0$ , a Dirac-delta a 0 pontban.

(b) •• Legyen  $f_n(x) = 2$ , ha  $x \in [\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}]$  valamely  $k = 0, 1, \dots, n-1$  egészre,  $f_n(x) = 0$  különben. Hová konvergálnak gyengén az  $f_n$  sűrűségfüggvényű  $\mu_n$  mértékek, ahogy  $n \rightarrow \infty$ ?

HF 1.3 (Bónusz) Legyenek  $\mu_n$  valószínűségi mértékek  $\mathbb{R}$ -en,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ -re.

(a) •• Igazoljuk, hogy ha  $d_{TV}(\mu_n, \mu_{\infty}) \rightarrow 0$ , akkor  $\mu_n \Rightarrow \mu_{\infty}$  is teljesül.

(b) • Igazoljuk, hogy ez fordítva nem igaz! Például vegyünk az előző feladat (a) részét.

(c) ••• Tegyük föl, hogy a  $\mu_n$  valószínűségi mértékeink  $\mathbb{R}$ -en rendelkeznek  $f_n$  sűrűségfüggvényekkel,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ -re. Igazoljuk a Dominált Konvergencia Tétel segítségével, hogy ha  $f_n(x) \rightarrow f_{\infty}(x)$  minden  $x \in \mathbb{R}$  pontban, akkor  $d_{TV}(\mu_n, \mu_{\infty}) \rightarrow 0$ .

HF 1.4 •• Legyen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  egy valószínűségi mértéktér,  $A_n \in \mathcal{F}$  pedig események, melyekre  $\mathbb{P}(A_n) > \varepsilon > 0$  minden  $n$ -re. Legyen  $A = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ , avagy szavakkal: az az esemény, hogy végtelen sok  $A_n$  teljesül. Írd fel az  $\mathbf{1}_A$  indikátorfüggvényt az  $\mathbf{1}_{A_n}$  indikátorok valamilyen limesz-szerűségével, majd bizonyítsd a Fatou lemma segítségével, hogy  $\mathbb{P}(A) \geq \varepsilon$ .

HF 1.5 Az órán említett *triadikus Cantor-halmaz*, és a belőle konstruált se nem diszkrét, se nem abszolút folytonos (azaz szinguláris) mérték, az *Ördöglépcső* eloszlásfüggvénnyel.

- Nulladik lépésben tekintsük a  $[0, 1]$  zárt intervallumot:  $C_0 := [0, 1]$ .
- Első lépésben vágjuk ki a középső nyílt  $1/3$ -ot — így marad  $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ .
- Második lépésben vágjuk ki mindkettőnek a középső nyílt  $1/3$ -át, így marad 4 darab  $1/9$  hosszúságú zárt intervallum —  $C_2$  jelölje ezek unióját.
- És így tovább: az  $n$ -edik lépés után maradt  $2^n$  darab zárt intervallum, melyek mindegyikének az  $n + 1$ -edik lépésben kivágjuk a középső nyílt  $1/3$ -át.
- Végül  $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ .

Vegyük észre, hogy ez a  $C$  ugyanaz, mint a következő. Minden  $x \in [0, 1]$  számot írjunk föl hármasszámrendszerben:  $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 3^{-i}$ . Ha véges kifejtést kaptunk, ami 1-re végződik, helyettesítsük az utolsó 1-est végtelen sok 2-essel — ezzel ugye ugyanazt a számot kapjuk. Ezután  $C = \{x \in [0, 1] : x_i \in \{0, 2\} \forall i\}$ .

- (a) • Igazoljuk, hogy  $C$  Lebesgue-mértéke nulla.
- (b) • Legyen  $F : C \rightarrow [0, 1]$  az a leképezés, hogy  $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2} 2^{-i}$ . Igazoljuk, hogy ez szürjektív! Vonjuk le a következtetést, hogy  $C$  kontinuum számosságú.
- (c) • Igazoljuk, hogy ha  $x \in [0, 1] \setminus C$ , akkor létezik pontosan egy  $n$ , hogy  $x$  benne van az  $n$ -edik lépésben eltávolított egyik  $3^{-n}$  hosszú nyílt intervallumban, nevezzük ezt  $(x_-, x_+)$ -nak, ráadásul  $F(x_-) = F(x_+)$ . Ezalapján terjesszük ki  $F$ -et  $C$ -ről az egész  $[0, 1]$ -re: legyen  $F(x) := F(x_-) = F(x_+)$ .
- (d) • Igazoljuk, hogy  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  folytonos, monoton növekvő, és majdnem minden  $x \in [0, 1]$  pontban létezik a deriváltja, mégpedig nulla. (Azaz azon pontok halmaza, ahol ez nem igaz, nulla Lebesgue-mértékű.) Vonjuk le a következtetést, hogy  $F$  egy eloszlásfüggvény, amiben nincs atom (ugrás), de nincs sűrűségfüggvénye se.

## 2. HF: (Beadási határidő: 2015. szept. 25.)

Definíció: Egy  $(X, d)$  metrikus térben egy  $K$  részhalmaz **kompakt**, ha minden végtelen  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$  sorozatból kiválasztható  $K$ -ban konvergens  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  részsorozat, azaz  $d(x_{n_k}, x) \rightarrow 0$  valamely  $x \in K$ -ra. (Megjegyzem, hogy ezt a topológikus tulajdonságot igazából **szekvenciális kompaktságnak** szokták hívni, de metrikus terekben ez ekvivalens a kompaktsággal, amit most nem is definiálok.)

- HF 2.1 (a) •• Bizonyítsuk be, hogy ha  $(X, d)$  egy metrikus tér, és  $K \subseteq X$  kompakt, akkor  $K$  korlátos (azaz létezik  $x \in X$  és  $R < \infty$ , hogy  $K \subset B_R(x)$ ) és zárt is.
- (b) • Igazoljuk például, hogy az  $\ell^2(\mathbb{Z})$  Hilbert tér zárt egységömbje, azaz

$$Z := \left\{ (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) : \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

hiába korlátos és zárt, mégse kompakt. (Tehát az  $\mathbb{R}^n$ -ben igaz Bolzano-Weierstrass tétel végtelen dimenzióban már nem igaz.)

- (c) • Igazoljuk, hogy egy kompakt metrikus tér mindig teljes.

HF 2.2 Egy nagyon hasznos következménye a kompaktságnak (a következő órán majd mutatok rá alkalmazást):

- (a) •• Legyen  $\{K_i : i = 1, 2, \dots\}$  kompakt halmazok egy családja valamely  $X$  metrikus térben úgy, hogy közülük bármely véges sok metszete nem üres. Bizonyítsuk be, hogy az összes metszete sem üres!
- (b) • Adjunk rá példát, hogy kompakt helyett  $\mathbb{R}^d$  zárt részhalmazaival ez már nem igaz.

HF 2.3 •• Igazoljuk, hogy az  $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$ ,  $(\mathbb{R}^d, d_2)$  és  $(\mathbb{R}^d, d_1)$  metrikus terek homeomorfak egymással, ahol  $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$ ,  $p = 1, 2, \infty$ .

HF 2.4 •••

- (a) Legyen  $(X, d_X)$  egy ívszerűen összefüggő metrikus tér, azaz minden  $x_0, x_1 \in X$  pontokhoz létezik folytonos görbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , melyre  $\gamma(i) = x_i$ ,  $i = 0, 1$ . Legyen  $(Y, d_Y)$  egy  $(X, d_X)$ -szel homeomorf metrikus tér. Igazoljuk, hogy  $Y$  is ívszerűen összefüggő.
- (b) Bizonyítsuk be, hogy  $\mathbb{R}$  és  $\mathbb{R}^2$ , mondjuk a  $d_2 = \|x - y\|_2$  euklideszi metrikával, nem homeomorfak egymással! (Segítség: ez sokkal könnyebb, mint ha  $\mathbb{R}^2$  és  $\mathbb{R}^3$  lenne, szóval nem kell pld. definiálni a dimenzió fogalmát topologikusan. Hanem mondjuk lehetne az előző részt használni.)

HF 2.5 (Bónusz) Legyen  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Az  $X$ -en hat a  $T$  eltolás:  $(Tx)(i) = x(i + 1)$ , minden  $x = (x(i))_{i \in \mathbb{Z}} \in X$ -re.

- (a) •• Adjunk meg egy  $d$  metrikát  $X$ -en, ami azt tudja, hogy  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  pontosan akkor, ha  $x_n$  pontonként konvergál  $x$ -hez, azaz minden  $i \in \mathbb{Z}$ -re létezik  $N$ , hogy minden  $n > N$ -re  $x_n(i) = x(i)$ .
- (b) •• Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges ilyen metrikával a  $T$  egy homeomorfizmus, de nem lehet izometria!
- (c) •• Igazoljuk, hogy  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  a fenti metrikával kompakt. (Tipp: használjuk a Cantor diagonális eljárás egy verzióját.)

### 3. HF: (Beadási határidő: 2015. okt. 2.)

HF 3.1 (Bónusz) A kompakt halmazok véges metszet tulajdonságáról szól ez a feladat.

- (a) •• Bizonyítsd be, hogy ha van egy végtelen fa (mint gráf), amiben minden csúcsnak véges sok szomszédja van, akkor van a fában végtelen hosszú egyszerű út (azaz ami egy csúcson legfeljebb egyszer mehet át).
- (b) • Mutass példát, hogy a véges fokszám feltétele nélkül ez már nem igaz.

HF 3.2 Ha már előszedtük az Ising modellt példaként, legyen egy feladat is róla. Az órainál kicsit általánosabban,  $G(V, E)$  véges gráfon,  $\beta$  inverzhőmérsékleten,  $h \in \mathbb{R}$  külső mágneses mezővel, egy  $\sigma \in \{-1, +1\}^{V(G)}$  spin-konfiguráció energiája legyen

$$H(\sigma) := -h \sum_{x \in V(G)} \sigma(x) - \sum_{(x,y) \in E(G)} \sigma(x)\sigma(y),$$

a valószínűsége

$$\mathbb{P}_{\beta,h}[\sigma] = \frac{\exp(-\beta H(\sigma))}{Z_{\beta,h}},$$

ahol a

$$Z_{\beta,h} = \sum_{\sigma \in \{-1,+1\}^{V(G)}} \exp(-\beta H(\sigma))$$

mennyiség nem csak egy unalmas normalizáló faktor, hogy valószínűségi mértéket kapjunk, hanem egy csomó érdekes információt is kódol:

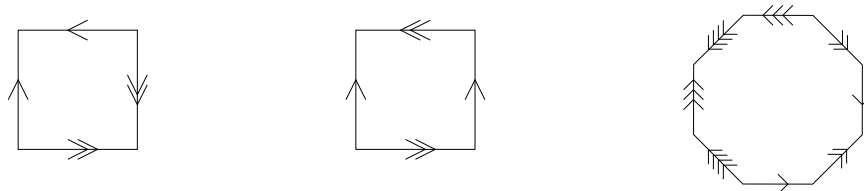


- (a) •• Igazold, hogy a  $H(\sigma)$  teljes energia várható értéke és szórásnégyzete

$$\mathbb{E}_{\beta,h}[H] = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_{\beta,h}, \quad \text{Var}_{\beta,h}[H] = -\frac{\partial}{\partial\beta} \mathbb{E}_{\beta,h}[H].$$

- (b) • Az átlagos szabad energia definíciója  $f(\beta, h) := -(\beta|V|)^{-1} \ln Z_{\beta,h}$ , a teljes magnetizációé pedig  $M(\sigma) := |V|^{-1} \sum_{x \in V} \sigma(x)$ . Igazold, hogy  $\mathbb{E}_{\beta,h}[M] = -\frac{\partial}{\partial h} f(\beta, h)$ .

HF 3.3 •• Milyen kétdimenziós topológikus sokaságokat kapunk a három esetben, ha a megfelelő oldalakat összeragasztjuk?



Miért nincs olyan a feladatok között, ahol háromszor is előfordulna ugyanaz az éljelzés?

Definíció: Volt órán, hogy ha  $M$  egy differenciálható sokaság, akkor mit jelent egy  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  függvény simasága. Hasonlóképpen, egy  $\{\varphi_\alpha, \alpha \in A\}$  atlisszal ellátott  $M$  sokaság, illetve egy  $\{\psi_\beta, \beta \in B\}$  atlisszal ellátott  $N$  sokaság között egy  $f : M \rightarrow N$  leképezést simának hívunk, ha a  $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  leképezések, amikor értelmük van, mindig simák (végtelen sokszor diffhatóak). Továbbá,  $M$  és  $N$  **diffeomorfak**, ha létezik  $f : M \rightarrow N$  bijekció, hogy  $f$  és  $f^{-1}$  is sima. (Nem trivi, de csak azonos dimenziós sokaságok lehetnek diffeomorfak, ugyanis már homeomorfak is csak akkor lehetnek.)

HF 3.4 Vegyük az  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  (egység)gömb térképezését két térképpel, a  $\varphi : S^2 \setminus \{\vec{E}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  és  $\psi : S^2 \setminus \{D\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  sztereografikus projekciókkal, az  $\vec{E} = (0, 0, 1)$  északi, illetve  $D = (0, 0, -1)$  déli sarokpontból, a szemközti póluson átmenő vízszintes síkra. (A képek nem korlátosak  $\mathbb{R}^2$ -ben, hanem a teljes  $\mathbb{R}^2$ -ek, de ez nem baj, hiszen az  $\mathbb{R}^2$  is homeomorf az  $\mathbb{R}^2$  nyílt gömbjével.)

- (a) •• Mutassuk meg, hogy  $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  végtelen sokszor differenciálható leképezés, így ez a két térkép tényleg egy atlaszt alkot. (Útmutatás: használjunk polárkoordinátákat.)
- (b) •• Bizonyítsd, hogy az első sorbeli egyenlettel való megadás és az **implicit-fgv tétel** ad természetesen módon egy 2-dimenziós differenciálható struktúrát  $S^2$ -n, amivel az  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  identikus beleképezés differenciálható lesz. (Segítség: először is, hány darab térkép legyen az atlaszban? Függvényképekre akarjuk fölívni a gömbfelszínt, nyílt értelmezési tartományokkal, és hát hány nyílt félgömbbel tudjuk lefedni a teljes gömbfelszínt?)
- (c) •• (Bónusz) Mutassuk meg, hogy az (a) és (b) részekben kapott két differenciálható sokaság (ugyanazon a topológikus sokaságon két különböző atlasz) egymással diffeomorf.

HF 3.5 A **Lie-csoport** fogalmát fogjuk most definiálni.

- (a) • Az  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  körvonalon adjunk meg egy 1-dimenziós diffható sokaság struktúrát, hasonlóan az előző gyakorlathoz, mindegy, hogy az (a) vagy (b) módon.
- (b) • Ha  $M$  egy  $d$ -dim diffható sokaság, adjunk meg az  $M \times M$  direkt szorzaton egy atlaszt, hogy egy  $2d$ -dimenziós diffható sokaságot kapjunk, amivel az  $M \times M \rightarrow M$  első illetve második koordinátára való projekciók simák lesznek.
- (c) • Az  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  egy csoport is, a (mod 1) összeadással. Igazoljuk, hogy az  $(x, y) \mapsto x+y \pmod{1}$  leképezés  $S^1 \times S^1$ -ről  $S^1$ -be, illetve az  $x \mapsto -x \pmod{1}$  invertálás  $S^1$ -ről  $S^1$ -be, ezek sima leképezések a fenti diffható sokaság struktúrákkal. Pontosan ezt jelenti az, hogy  $S^1$  egy Lie-csoport.

4. HF: (Beadási határidő: 2015. okt. 9.)

HF 4.1 (Bónusz) **Egy mátrixcsoport mint diffható sokaság.**

- (a) •• Vegyük az  $S^3 = \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 1\}$  egységgömböt. Az implicitfüggvény-tétel segítségével ez megint természetes módon egy 3-dimenziós differenciálható sokaság, és az  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  identikus beleképezés differenciálható. Hasonlóképpen, az

$$SU(2) := \left\{ A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : \overline{A}^T A = I \text{ és } \det A = 1 \right\}$$

mátrixcsoport, mint  $\mathbb{C}^4$ -nek, vagy inkább  $\mathbb{R}^8$ -nak, öt darab egyenlettel definiált részhalmaza, természetes módon egy 3-dimenziós diffható sokaság. Igazoljuk, hogy az előző  $S^3$ -mal diffeomorf!

- (b) •• Természetes módon  $SU(2) \times SU(2)$  egy 6-dimenziós diffható sokaság, és az  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2)$ ,  $(A, B) \mapsto AB$  mátrixszorzás, illetve az  $A \mapsto A^{-1}$  invertálás differenciálható leképezések. Azaz  $SU(2)$  egy **Lie-csoport**. Ezeket egyszerű de unalmas bizonyítani, nem ez a feladat. Hanem, hogy ezek szerint  $S^3$ -on és  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ -n van Lie-csoport struktúra, ellenben bizonyítsuk a sündisznó-fésülési tétel segítségével, hogy  $S^2$ -n viszont nem létezhet Lie-csoport struktúra!

HF 4.2 Ha  $X$  és  $Y$  sima vektormezők  $M$ -n, akkor  $M$  minden  $p$  pontjában értelmezhetjük az alábbi lineáris operátorokat, melyek a ( $p$  kis környezetében értelmezett)  $f$  sima függvényeken hatnak: (i)  $(XY)_p(f) = X_p(Y(f))$ ; (ii)  $(YX)_p(f) = Y_p(X(f))$ , (iii)  $[X, Y]_p = (XY)_p - (YX)_p$ . Mutassuk meg, hogy

- (a) ••  $(XY)_p$  ugyan lineáris operátor (ellenőrizzük ezt is), de mégsem lehet egy  $V_p$  érintővektor, mert nem feltétlen teljesíti a Leibniz-féle  $V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p(g)$  szorzat-szabályt. (Segítség: ellenpélda már abban az esetben is van, amikor  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $X$  és  $Y$  parciális deriválások.)
- (b) •  $[X, Y]_p$ -ra már teljesül a Leibniz-szabály. (Ebből következik, hogy az  $M$ -en kapunk egy  $[X, Y]$  sima vektormezőt. Ezt az  $X$  és  $Y$  vektormezők kommutátorának vagy **Lie-zárójelének** is szokták nevezni.)
- (c) •• Adjunk meg valamely  $\mathbb{R}^n$ -ben  $X$  és  $Y$  vektormezőket, melyekre  $[X, Y] \neq 0$ .

Megjegyzés: A Lie-csoportok egyik csodája, hogy a rajtuk vonuló érintővektormezők Lie-zárójelét algebrai módon is lehet definálni, a Lie-csoport struktúrából kiindulva. Ezért van mindkettő Sophus Lie-ről elnevezve.

Összefoglaló: Ha  $f : M_1 \rightarrow M_2$  egy diffható leképezés  $n_i$ -dimenziós diffható sokaságok között, akkor a  $D_p f : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$  **derivált** az az a lineáris leképezés a megfelelő érintőterek között, mely a  $p$  ponton átmenő  $\gamma$  görbék egy szokásos egyirányba-menő ekvivalenciaosztályát az  $f(\gamma)$  görbék ekvivalenciaosztályába viszi. (Könnyű látni, hogy ekvivalens görbéknek tényleg ekvivalens a képe, és hogy a kapott  $D_p f$  leképezés tényleg lineáris.)

Na most, ha  $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$  egy diffeomorfizmus két Riemann-sokaság között, akkor egy globális definíciója az **izometriának** az, hogy teljesül rá, hogy  $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$  az indukált

$$d_i(x, y) := \inf \left\{ \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{g_i} dt : [0, 1] \xrightarrow{\gamma} M_i \text{ diffható, } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}$$

metrikákkal. Egy lokális definíció, hogy a  $D_p f$  derivált minden  $p \in M_1$  pontban megőrzi a Riemann metrikus bilinéris formákat:  $g_2(D_p f(v), D_p f(w)) = g_1(v, w)$ , minden  $v, w \in T_p M_1$  érintővektorpárra.

HF 4.3 \*\*\* Igazoljuk, hogy a két fenti definíciója az izometrikusságnak ekvivalens!

HF 4.4 \*\* Ahogy az előadáson volt, a  $\mathbb{T}^2$  tóruszon két fajta Riemann-metrikát is könnyen el tudunk képzelni. Az első a lapos tórusz: a  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  faktorizálással az  $\mathbb{R}^2$ -beli Euklideszi metrikát örökli. A második, hogy veszünk egy  $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  úszógumi-beágyazást, ez beágyazza a  $T_x\mathbb{T}^2$  érintősíkok mindegyikét is  $\mathbb{R}^3$ -ba, és megszorítjuk a háromdimenziós Riemann-metrikát ezekre az érintősíkokra. Magyarul, két  $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ -beli pont távolsága az őket a tóruszon összekötő görbék  $\mathbb{R}^3$ -beli hosszának infimuma. Igazoljuk, hogy egy lapos tórusz egyetlen úszógumi-tórussszal sem izometrikus. (Segítség: nézhetjük például a legrövidebb összehúzhatatlan köröket az egyik illetve másik esetben.)

HF 4.5 \*\* Legyen  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  a nyílt egységkörlemez, és tekintsük a következő Riemann-metrikát:

$$g(v, w) := \frac{4(v, w)_{\text{Eucl}}}{(1 - \|z\|_{\text{Eucl}}^2)^2}, \quad \text{ha } v, w \in T_z\mathbb{D}.$$

Ez a Bolyai-féle **hiperbolikus sík** Poincaré-féle körmodellje.

Legyen  $x < y \in \mathbb{R}$  két pont  $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}$ -ből, és  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [x, y]$  egy sima monoton növekvő görbe  $x$  és  $y$  között, aminek a képe végig  $\mathbb{R}$ -ben marad. Számoljuk ki  $\gamma$  hiperbolikus hosszát! (Figyelem! Sok ilyen görbe van, mert ide-oda változó sebességgel járhatjuk be az  $[x, y]$  szakaszt. Számít, hogy melyik ilyen görbének számoljuk a hosszát?)

## 5. HF: (Beadási határidő: 2015. okt. 30.)

HF 5.1 A Poincaré rekurrencia tétel bizonyítását órán hibásan mondtam el. Tényleg:

- (a) \*\* Mutassunk példát arra, hogy ha a  $T : M \rightarrow M$  endomorfizmus nem invertálható,  $A \subset M$  és

$$B := \{x \in A \mid T^n x \notin A (n = 1, 2, \dots)\}$$

az  $A$  halmaz soha vissza nem térő pontjainak halmaza, akkor a  $B, T(B), T^2(B), \dots$  halmazok nem feltétlenül lesznek páronként diszjunktak.

- (b) • Mutassuk meg, hogy a  $B, T^{-1}(B), T^{-2}(B), \dots$  halmazok viszont kénytelenek páronként diszjunktak lenni.  
 (c) • Vonjuk le a következtetést, hogy ha a  $\mu$  valószínűségi mérték invariáns  $T$ -re, akkor  $\mu(B) = 0$ .

HF 5.2 *Dinamika hatása mértéken*

- (a) • Legyen az  $M = [0, 1]$  fázistéren  $T : M \rightarrow M$  dinamika:  $Tx := x^2$ . Legyen a  $\mu$  mérték abszolút folytonos  $M$ -en (Lebesgue-re nézve), de nem feltétlenül invariáns  $T$ -re. Például legyen  $\rho(x) = 2 - 2x$  a  $\mu$  sűrűségfüggvénye (ami ugye annyit jelent, hogy  $\mu(B) = \int_B \rho(x) dx$ ).  $T^*\mu$ -vel jelöltük a  $\mu$  előretoltját  $T$ -vel, vagyis azt a mértéket, amire  $(T^*\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B))$ . Mi lesz  $T^*\mu$  sűrűségfüggvénye?  
 (b) • Vajon van olyan abszolút folytonos mérték, ami erre a  $T$ -re invariáns?

HF 5.3 (Bónusz) Legyen  $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$  endomorfizmus és  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) \*\* Mutassuk meg, hogy ha  $T^n$  ergodikus ( $\mu$ -re nézve), akkor  $T$  is ergodikus.  
 (b) • Mutassuk meg, hogy ennek megfordítása általában nem igaz. (*Tipp: röhejesen egyszerű dinamikai rendszerre is gondolhatunk.*)

HF 5.4 *A körvonal forgatása és a Weil tétel.* Tekintsük az  $S := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  fázistérrel, ami egy körvonal (vagy ha tetszik, az 1-dimenziós tórusz, vagy az egységintervallum periodikus határfeltétellel), a Lebesgue mértékkel és a  $T : x \mapsto x + \alpha$  leképezéssel, ahol  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Nem nehéz bebizonyítani (de most nem ez a feladat), hogy  $T$  endomorfizmus, ami

pontosan akkor ergodik, ha  $\alpha$  irracionális. Ez a Birkhoff ergodtétel szerint azt jelenti, hogy ha  $\alpha$  irracionális és  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrálható, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^k x) = \int_S f \, d\text{Leb}$$

teljesül *Lebesgue-majdnem minden*  $x \in S$ -re.

Weil tétele szerint viszont, ha  $f$ -et  $f = \mathbf{1}_I$ -nek választjuk, ahol  $I \subset S$  egy intervallum, akkor ennél több is igaz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_I(T^k x) = \text{Leb}(I)$$

teljesül *minden*  $x \in S$ -re, ha  $\alpha$  irracionális. A bizonyítása ennek se nehéz, de most nem ez a feladat.

- (a) • Mennyi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin^2(x+k)$  értéke tipikus  $x$ -re?
- (b) • Mennyi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin^2(k)$ ? (Tipp: ez az előzőnek könnyű következménye: lehet analízissel, azaz  $x \rightarrow 0$  limeszszel, vagy algebrai identitásokkal is támadni. De a limeszfölcserélést meg kell ám indokolni!)
- (c) •• (egy Arnold-feladat:) Tekintsük az  $1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots$  számok 10-es számrendszerbeli alakjainak első számjegyeit. Előfordul a 7? Hát a 8? Melyik a gyakoribb? (Tipp:  $\log_{10} 2$  irracionális.)

HF 5.5 •• *Gauss leképezés.* Tekintsük a  $T : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ ,  $Tx := \frac{1}{x} \pmod{1}$  leképezést. (Vagyis  $Tx$  legyen az  $\frac{1}{x}$  törtrésze, hacsaknem ez 0 lenne, mert akkor  $Tx$  legyen 1.) Mutassuk meg, hogy erre a leképezésre invariáns az a valószínűségi mérték  $(0, 1]$ -en, aminek a sűrűségfüggvénye (a Lebesgue-re nézve)  $\frac{\text{const}}{1+x}$ . (Mennyi a konstans?)

## 6. HF: (Beadási határidő: 2015. nov. 6.)

HF 6.1 Szemléltessük az alábbi vektormezőket és az általuk generált diffeomorfizmus folyamokat (avagy egyparaméteres csoporthatásokat).

- (a) •• Tekintsük  $\mathbb{R}^3$ -n a

$$\Theta(t, \underline{x}) = \begin{pmatrix} \cos at & 0 & \sin at \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin at & 0 & \cos at \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad t \in \mathbb{R}$$

egyparaméteres csoporthatást, ahol  $a > 0$  tetszőleges paraméter. Igazoljuk, hogy tényleg csoporthatás  $t$ -ben, azaz  $\Theta(t+s, \underline{x}) = \Theta(s, \Theta(t, \underline{x}))$ . Milyen vektormező generálja  $\Theta(t, \underline{x})$ -t? (Azaz, micsoda  $V_{\underline{x}} := \frac{d}{dt} \Theta(t, \underline{x})|_{t=0}$ ?) Mutassuk meg, hogy ez a csoporthatás természetes módon megszorítható  $S^2$ -re:  $\underline{x} \in S^2$  (azaz  $|\underline{x}| = 1$ ) esetén  $\Theta(t, \underline{x}) \in S^2$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Szemléltessük a vektormezőt és a csoporthatást is  $S^2$ -n.

- (b) •• Tekintsünk  $\mathbb{T}^2$ -re úgy, mint a  $[0, 1] \times [0, 1]$  egységnégyzetre, melynek a szemközti oldalait azonosítjuk. Így az (azonosított) négyzetoldalaktól eltekintve az  $(x_1, x_2)$ ,  $0 < x_1 < 1$ ,  $0 < x_2 < 1$  koordináták egy térképezését adják  $\mathbb{T}^2$ -nek. Legyenek az  $X$  és az  $Y$  vektormezők ezen a térképen  $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + 5 \frac{\partial}{\partial x_2}$ , illetve  $Y = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{5} \frac{\partial}{\partial x_2}$  (ezek a teljes  $\mathbb{T}^2$ -re folytonos módon kiterjeszthetők). Milyenek lesznek a generált egyparaméteres csoporthatások pályái? (Hasonlítsuk össze  $X$  és  $Y$  pályáit.)

HF 6.2 • Ha  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  egy sima leképezés egy diffható sokaságról, akkor definiáltuk korábban a  $D\varphi : TM \rightarrow T\mathbb{R}$  derivált leképezést. Ha  $X \in T_pM$  egy érintővektor, kapunk ezzel egy  $D\varphi(X) \in T_q\mathbb{R}$  érintővektort, avagy  $q$ -beli derivációt, ahol  $q = \varphi(p)$ . Másrészt, mivel most  $\varphi$  valós értékű, lehet nézni az  $X_p\varphi$  irányszerinti deriváltat is. Igazoljuk, hogy ez a kettő ugyanaz, abban az értelemben, hogy tetszőleges  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sima függvényre

$$D\varphi(X)_q f = X_p\varphi \cdot f'(q).$$

Szokták  $D\varphi$ -t, ebben a specilális esetben, amikor  $\mathbb{R}$  a képtér,  $d\varphi$ -vel is jelölni. Például a következő példában.

Definíció: **Differenciál  $k$ -formának** hívjuk a sima alternáló  $k$ -kovektor mezőket, azaz minden  $p \in M$ -re van egy  $\omega_p : (T_pM)^k \rightarrow \mathbb{R}$  multilineáris leképezésünk, ami bármely két inputvektorát felcserélve  $-1$ -szeresére változik, és ami  $p$ -ben sima, azaz tetszőleges  $X_1, \dots, X_k$  sima érintővektormezőik esetén a  $p \mapsto \omega_p(X_1(p), \dots, X_k(p))$  leképezés is sima. Pld ha  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sima függvény, akkor  $df$  egy 1-forma, bár mondjuk az alternálás feltétele itt üresen teljesül. Ha pedig  $M$   $m$ -dimenziós, akkor a seholnemnulla  $m$ -formákat (azaz nincs olyan pont, ahol a null-leképezés lenne) **térfogati formának** hívjuk.

Na most, ha adottak  $\alpha$  és  $\beta$  differenciál  $k$ - és  $\ell$ -formák, akkor lehet belőlük a  $\wedge$  **külső szorzás** segítségével egy  $k + \ell$ -formát csinálni:

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}),$$

ahol  $S_{k+\ell}$  az összes permutáció halmaza  $k + \ell$  elemen. Könnyű látni, hogy alternáló multilineáris leképezésekből külső szorzással valóban alternáló multilineáris leképezést kapunk.

HF 6.3 (a) • Igazoljuk, hogy a művelet asszociatív:  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ .

(b) • Legyen  $V$  háromdimenziós vektortér,  $e_1, e_2, e_3$  a  $V$  egy bázisa (gondolhatunk pld  $\mathbb{R}^3$ -re és benne a standard bázisra),  $f_1, f_2, f_3$  pedig ennek a duális bázisa, azaz  $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$ . Az előző pontból következik, hogy ekkor  $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$  egy térfogati forma, melyre  $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3(e_1, e_2, e_3) = 1$ . Legyen továbbá  $v_1, v_2, v_3$  a  $V$  vektortér egy másik bázisa: ekkor létezik egy  $A_{ij}$   $3 \times 3$ -as invertálható mátrix, melyre  $v_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}e_j$ . Mutassuk meg, hogy  $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3(v_1, v_2, v_3) = \det A$ , ahol  $\det A$  az  $A$  mátrix determinánsa.

(c) • Igazoljuk, hogy ha  $V$   $m$ -dimenziós, akkor  $n > m$  esetén nincsen rajta nemnulla alternáló  $n$ -változós multilineáris forma.

Megjegyzés: Egy  $M^m$  sokaság minden  $U \subset M$  térképén lehet így lokálisan egy  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  térfogati formát definiálni, és ezzel lehet az  $\int_U f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  integrált definiálni. Hogy ezekből a lokális térfogati formákból össze lehet-e varrni egy seholnemnulla térfogati formát az  $M$ -en, az attól függ, hogy az  $M$  irányítható-e.

Összefoglalás: Adott egy Riemann sokaság  $(M, g)$ , és egy  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  sima görbe. A görbe mentén történő **Levi-Civita párhuzamos eltolás** az az a lineáris  $\tau_t : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$  leképezés, ami két dolgot tud: megőrzi a Riemann-metrikát és torziómentes. Ezeket most nem definiálok, mert két-dimenziós sokaság esetén ez arra egyszerűsödik, hogy tetszőleges  $v \in T_{\gamma(0)}M$  vektorra a  $\tau_t v$  eltolts és a  $\gamma'(t)$  irányvektor előjeles bezárt szöge, avagy a

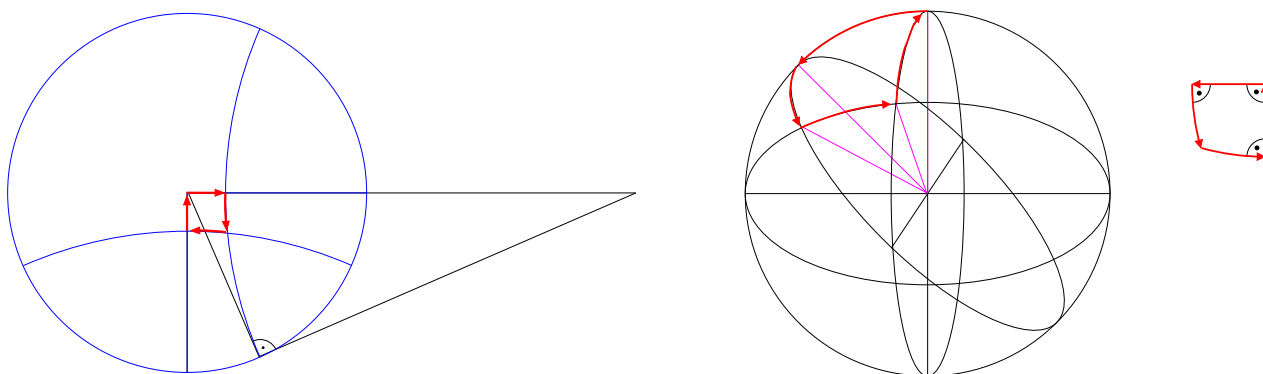
$$\frac{g_{\gamma(t)}(\tau_t v, \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|_g}$$

normált belsőszorzat, állandó.

Na most, vegyünk két merőleges  $u, v \in T_p M$  egységvektort, és a  $p$  környezetében egy térképezést, aminél a  $p$ -ból induló koordinátavonalak közül kettő az  $u, v$  irányokba indul. Vegyük a térképen az ezen koordinátavonalak által megadott  $\varepsilon$  oldalhosszú négyzetet, majd ennek a  $\gamma[0, \varepsilon]$  képét  $M$ -en. Most legyen  $\tau_\varepsilon : T_p M \rightarrow T_p M$  az a forgatás, amit úgy kapunk, hogy egy  $w$  érintővektort körbetolunk párhuzamosan ezen a  $\gamma[0, \varepsilon]$  görbén, és legyen

$$K(u, v)w := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau_\varepsilon w - w}{\varepsilon^2}.$$

Nem nehéz igazolni (de nem ez lesz a feladat), hogy ez egy (1,3)-tenzor, azaz tetszőleges  $u, v, w \in T_p M$  vektorokra és  $\ell \in T_p^* M$  kovektorra ad egy  $\ell(K(u, v)w)$  számot, mind a négy változójában lineáris módon, és ráadásul a koordinátázástól függetlenül. Ezt hívják **Riemann görbületi tenzornak**, és lényegében ezt fogjuk kiszámolni a következő két egyszerű példán.



HF 6.4 (a) •• Vegyük az  $r$  sugarú gömb felszínén,  $S_r^2$ -en a szokásos  $g$  Riemann metrikát, ami az  $\mathbb{R}^3$ -be ágyazásból származik, a főkör geodetikussal. Vegyük továbbá két merőleges  $u, v \in T_0$  egységvektort a 0-val jelölt északi sarkon, és a 0 környezetében a sztereografikus projekcióval való térképezést, aminél a 0-ból induló koordinátavonalak az  $u, v$  irányokba indulnak. Most a térképről a  $[0, \varepsilon]^2$  négyzetlap határának a képe az  $S_r^2$ -en a jobboldali ábrán látható piros geodetikus négyszög lesz. Ezen a  $\gamma_\varepsilon$ -on vesszük a Levi-Civita körbetolást. Számoljuk ki a **Ricci görbületnek** nevezett  $(K(u, v)u, v)_g$  értéket! Vegyük észre, hogy egy  $r$ -től függő pozitív számot kaptunk, ami az  $S_r^2$  görbületét méri.

Megjegyzés: Eszerint az  $S^2$  nemnulla görbülete részben az  $SO(3)$  forgatáscsoport nemkommutativitása miatt van.

(b) •• Mint HF 4.5-ben,  $(\mathbb{D}, g)$  a hiperbolikus sík körmodellje. Legyen  $u, v \in T_0 \mathbb{D}$  két merőleges egységvektor, és legyen  $\gamma_\varepsilon$  az  $u$  és  $v$  irányokba induló  $\varepsilon$  hosszú geodetikus darabok által feszített geodetikus négyszög az ábra bal oldalán. Számoljuk ki megint a  $(K(u, v)u, v)_g$  értéket! Vegyük észre, hogy ez negatív: a körbetolás a  $v$ -vel ellenkező irányba forgatja el  $u$ -t.

## 7. HF: (Beadási határidő: 2015. nov. 13.)

HF 7.1 ••• Alább három Markov lánc szóban, és három eloszlás. Válassz a háromból kettőt, és írd föl a láncok állapottereit, átmenetvalószínűségeit, és igazold, hogy a megfelelő eloszlások stacionáriusak.

(a)  $n$ , körben elhelyezett urnában  $k$  golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük, amennyiben az üres. Ha nem üres, akkor nem csinálunk semmit. **Fermi-Dirac eloszlás:**  $k$  golyót véletlenszerűen elosztunk  $n \geq k$  urnába úgy, hogy mindegyik urnába legfeljebb egy kerülhet.

- (b)  $n$ , körben elhelyezett urnában  $k$  golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Maxwell-Boltzmann eloszlás:**  $k$  megkülönböztethető golyót véletlenszerűen elosztunk  $n$  urnába.
- (c)  $n$ , körben elhelyezett urna közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és egy abban levő golyót – ha van – az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Bose-Einstein eloszlás:**  $k$  megkülönböztethetetlen golyót véletlenszerűen elosztunk  $n$  urnába.

HF 7.2 A Médiarendőrség a TV-nézéssel kapcsolatban a következő állapotokat figyelte meg: 1 (sosem néz TV-t), 2 (csak közszolgálati műsorokat néz), 3 (gyakran TV-zik), 4 (TV-függő), 5 (agyhalott). Ezen állapotok közti átmeneteket egy Markov láncsal lehet modellezni, melynek átmenetmátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát pld. közszolgálati-rajongó senki nem lesz csak úgy — arra születni kell.

- (a)•• 2-es állapotból indulva, mi a valószínűsége, hogy az 5-ös állapot előbb bekövetkezik, mint a 1-s, azaz, hogy egy közszolgálati műsorokat néző agyhalottként végzi?
- (b)•• Várhatóan mennyi ideig tart amíg egy közszolgálati műsorokat néző leszokik a TV-zésről, vagy pedig eléri az agyhalott állapotot? (Segítség: az elérési valószínűségekhez hasonlóan föl lehet írni egy rekurziót az első lépés szerint. Csak ne felejtsük el, hogy az első lépés az már egy lépés!)

HF 7.3 Vegyünk egy Markov-láncot egy megszámlálható  $X$  állapottéren,  $P = (p(x, y))_{x, y \in X}$  átterési mátrixszal,  $\pi$  stacionárius mértékkel, és tekintsük az

$$(f, g)_\pi := \sum_{x \in X} f(x) g(x) \pi(x)$$

skalárszorzatot  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  függvényekre. Persze a  $P$  mátrix hat az  $L^2(X, \pi)$  függvénytéren:

$$(Pf)(x) := \sum_{y \in X} p(x, y) f(y).$$

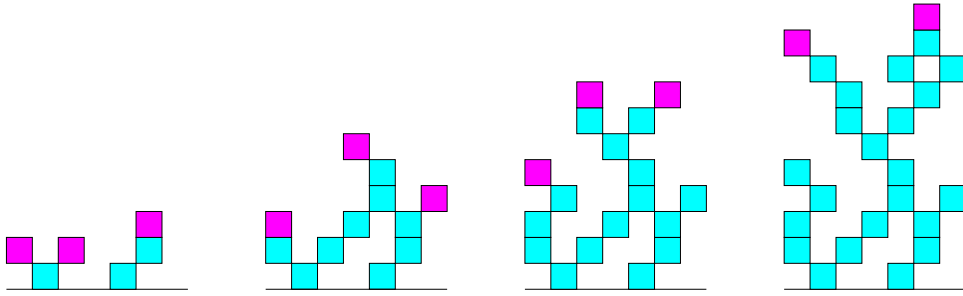
- (a) •• Igazoljuk, hogy  $\pi$  pontosan akkor egy **reverzibilis** mérték, azaz tudja azt, hogy

$$\pi(x) p(x, y) = \pi(y) p(y, x), \quad \forall x, y \in X,$$

ha  $P$  önadjungált:  $(Pf, g)_\pi = (f, Pg)_\pi$  minden  $f, g \in L^2(X, \pi)$ -re.

- (b) •• Igazoljuk, hogy egy reverzibilis mérték stacionárius is, és, hogy adott Markov láncra globális konstans faktortól eltekintve legfeljebb egy reverzibilis mérték van. Ha a kezdőpont  $X_0$  egy  $\pi$  reverzibilis valószínűség szerint van választva, akkor tetszőleges  $k \in \mathbb{N}$ -re az  $(X_0, X_1, \dots, X_k)$  vektor eloszlása megegyezik az  $(X_k, X_{k-1}, \dots, X_0)$  vektorával. Egy Markov láncot akkor hívunk reverzibilisnek, ha létezik reverzibilis mértéke.

HF 7.4 (Bónusz) ••• A Tetris játék egy egyszerű változata: a  $[0, K]$  intervallum (mod  $K$ ), azaz egy kör, egyenletesen választott véletlen  $[i, i+1]$  szakaszaira ( $i = 0, 1, \dots, K-1$ ) egységnégyzetek esnek, amiknek ragacsos a sarka. Legyen  $R_t$  a tető mérete  $t$  darab négyzet leesése után: azon négyzetek, amik eshettek volna utoljára. Igazoljuk, hogy  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}R_t = K/3$ .



Bocs, ezen az ábrán az intervallumon, nem pedig a körön történik a folyamat.

HF 7.5 (Bónusz) **•••** Adjunk példát egy korlátos fokú végtelen  $G(V, E)$  gráfra (akár fa is lehet), ami „nagy” abban az értelemben, hogy exponenciális térfogatnövekedésű, azaz létezik  $c > 0$  és  $q > 1$ , hogy minden  $x \in V$  csúcsára és minden  $n$ -re az  $x$ -ből legfeljebb  $n$  hosszú úttal elérhető csúcsok száma legalább  $cq^n$ , viszont bolyongás szempontjából kicsi: rekurrens.

*Megjegyzés:* A Pólya-tétel egy általánosítása, hogy minden tranzitív (homogénnek is szokták hívni: minden pontjából ugyanúgy néz ki) gráf, melynek térfogatnövekedése négyzetesebbnél nagyobb, az tranzitív. Azaz most nagyon ne tranzitív példát keressünk.

## 8. HF: (Beadási határidő: 2015. nov. 20.)

Definíció: Legyenek  $A$  és  $Z$  egy véges élsúlyozott  $G(V, E, c)$  gráf diszjunkt csúcsrészhalmazai, és adott rajtuk  $f|_A = \alpha$  és  $f|_Z = \beta$ , ahol  $\alpha > \beta$ . Vegyük ennek az  $f$  harmonikus kiterjesztését az egész  $V$ -re, és legyen  $i = \nabla f$  az elektromos áram, ami  $A$ -ból  $Z$ -be folyik. Az

$$\|i\| := \sum_{x \in A, y \in V} i(x, y) = \sum_{x \in V, y \in Z} i(x, y)$$

mennyiséget az áram erősségének hívjuk. Világos, hogy az

$$\mathcal{R}(A \leftrightarrow Z) := \frac{\alpha - \beta}{\|i\|}$$

hányados független az  $\alpha > \beta$  értékektől. Ezt hívják az  $A$  és  $Z$  közötti **eredő ellenállásnak**. Az inverze,  $\mathcal{C}(A \leftrightarrow Z) := 1/\mathcal{R}(A \leftrightarrow Z)$  az **eredő konduktancia**.

HF 8.1 **••** Mutassuk meg, hogy hálózatok sorbakötésekor az eredő ellenállás összeadódik, míg párhuzamos összekötéskor az eredő konduktancia adódik össze.

HF 8.2 (Bónusz) Legyen  $Z \subset V$  úgy, hogy  $V \setminus Z$  véges, és legyen  $o \notin Z$ , ahonnan egy bolyongást indítjuk, amit  $Z$ -ben megölünk. Legyen

$$G^Z(o, y) := \mathbb{E}_o[\text{hányszor vagyunk } y\text{-ban mielőtt } Z\text{-t elérnénk}],$$

- Igazoljuk, hogy  $f(x) := G^Z(o, x)/C_x = G^Z(x, o)/C_o$  harmonikus minden  $x \notin Z \cup \{o\}$  pontban, ahol  $C_x = \sum_y c(x, y)$ .
- Igazoljuk, hogy a  $\nabla f$  áram erőssége pontosan 1. (Tipp: igazoljuk először, hogy  $z \in Z$ -re  $\nabla f(x, z)$  pont annak a valószínűsége, hogy az  $(x, z)$  élen keresztül érjük el  $Z$ -t.)
- Az előző pont és a geometriai eloszlás várható értékének segítségével bizonyítsuk az eredő konduktancia következő valszámos jelentését:  $\mathcal{C}(o \leftrightarrow Z) = C_o \mathbb{P}_o[\tau_Z < \tau_o^+]$ , ahol  $\tau_o^+$  az első pozitív pillanat, hogy  $o$ -ban vagyunk.

HF 8.3 **••** Adott véges élsúlyozott gráf  $G(V, E, c)$ , és egy  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  függvény egy  $U \subset V$  részhalmazon. Igazold, hogy  $f$ -nek a teljes  $V$ -re való kiterjesztései közül az  $\mathcal{E}(\nabla f)$



Dirichlet-energiát minimalizáló egyetlen függvény minden  $V \setminus U$  pontban harmonikus a  $c$  súlyok szerint. (Tipp: a  $\varphi(x) = \sum_i (x - a_i)^2$  parabolára mi a  $\varphi'(x) = 0$  megoldása?)

*Most pedig néhány eddiginek a folytonos változata. Ha kell emlékeztető többváltozós kalkulusból, lásd a feladatsor végén.*

HF 8.4 ••• Legyen  $D \subset \mathbb{R}^n$  egy kompakt tartomány. Igazolandó, hogy a

$$\begin{cases} -\Delta u = f & D\text{-n,} \\ u = g & \partial D\text{-n} \end{cases}$$

peremfeltételes Poisson egyenlet egyetlen  $u$  megoldására  $I(u) = \min\{I(w) : w \in \mathcal{A}\}$ , ahol

$$I(w) := \int_D \frac{1}{2} \|\nabla w(x)\|^2 - w(x)f(x) \, dx$$

energia, és  $\mathcal{A} := \{w : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenciálható, } w|_{\partial D} = g\}$ .

*Segítség:* ha  $u$  megoldás és  $w \in \mathcal{A}$ , akkor  $0 = \int_D (-\Delta u - f)(u - w) \, dx$ . Erre engedjük rá az alábbi kalkulus összefoglalóból a (C) formulát, majd használjuk (és igazoljuk!) a  $|\langle \nabla u, \nabla w \rangle| \leq \frac{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla w\|^2}{2}$  egyenlőtlenséget.

Fordítva, ha  $u$  minimalizálja az energiát, akkor tetszőleges  $w \in \mathcal{A}$  függvényre a  $t = 0$  pont minimalizálja az  $i(t) := I(u + tw)$  függvényt, így  $i'(0) = 0$ , minden  $w$ -re, ami adni fogja, hogy  $u$  megoldás kell, hogy legyen.

HF 8.5 **Harmonikus függvények középérték-tulajdonsága.** Jelölje  $|\partial B(x, r)|$  az  $x$  körüli  $r$  sugarú gömbfelület felszínét. Bizonyítsuk be az előadáson említett két **középérték-tulajdonság** közül az erősebbet, kétféleképpen:

**1. Tétel.** *Ha  $u$  harmonikus az  $U \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmazon és  $B(x, r) \subset U$ , akkor*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) \, dS(y),$$

*vagyis a függvényérték a gömb középpontjában éppen a felületen felvett értékek átlaga.*

(a) •• Kalkulussal. Rögzített  $x$  mellett tekintsük a

$$\varphi(r) := \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) \, dS(y)$$

függvényt.

- i.  $\varphi(r)$  képletében végezzünk el egy integrál-helyettesítést úgy, hogy utána az integrálási tartomány már ne függjön  $r$ -től (legyen mondjuk  $\partial B(0, 1)$ ).
  - ii. Most már számolhatjuk  $\varphi'(r)$ -t az integrál alá bederiválva.
  - iii. Alkalmazzuk a lenti (C) vagy (D) formulát.
- (b) ••• Konceptuálisan:
- i. Mutassuk meg (egyszerűen, kézzel kiszámolva), hogy a Laplace egyenlet forogásinvariáns  $\mathbb{R}^n$ -ben: ha  $\Delta u = 0$  és  $O$  egy  $n \times n$  ortogonális mátrix, akkor  $v(x) := u(Ox)$  is megoldja a Laplace egyenletet.
  - ii. Ez alapján igazoljuk, hogy az  $x$ -ből nézett harmonikus mérték a  $\partial B(x, r)$  gömbfelületen az egyenletes valószínűségi mérték.

**Kalkulus alapok** (A) Gauss-Green, avagy Newton-Leibniz többdimenzióban:

$$\int_U u_{x_i} dx = \int_{\partial U} u \nu^i dS,$$

ahol  $u_{x_i}$  parciális deriválás,  $\nu^i$  a  $\partial U$ -ben kifelé mutató normálvektor  $i$ -edik koordinátája,  $S$  pedig a felületi mérték.

(B)  $u$  helyett  $uv$ -re alkalmazva az előzőt:

$$\int_U u_{x_i} v dx = - \int_U uv_{x_i} dx + \int_{\partial U} uv \nu^i dS,$$

a parciális integrálás formulája.

(C)  $uv$  helyett  $u_{x_i}v$ -re alkalmazva az előzőt, majd  $i$ -re szummázva:

$$\int_U (\Delta u)v dx = - \int_U \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS,$$

ahol  $\langle x, y \rangle$  a skalárszorzat.

(D) Egy  $V = (V_1, \dots, V_d)$  vektormező koordinátáira alkalmazva a Gauss-Greent, majd szummázva:

$$\int_U \operatorname{div} V dx := \int_U \sum_{i=1}^d \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial U} \langle V, \nu \rangle dS =: \operatorname{flux}_{\partial U} V,$$

ami Gauss divergencia-tétele.

**9. HF:** (Beadási határidő: 2015. dec. 4.)

**HF 9.1 ••• Tört-lineáris leképezések.** Tört-lineáris leképezésnek nevezzük a

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

alakú leképezéseket, ahol  $a, b, c, d$  komplex számok és a tört nem egyszerűsödik egy konstans függvényre — vagyis  $ad \neq bc$ . Egy ilyen leképezés értelmezési tartománya a komplex számsík, kivéve az egyetlen  $P = -\frac{d}{c}$  pontot (amit a végtelenbe visz). Ezen a tartományon a leképezés természetesen holomorf, és könnyen ellenőrizhetően konformis is.

Cél: Igazolni akarjuk, hogy a tört-lineáris leképezések a sík minden egyenesét és minden körét egyenesbe vagy körbe viszik át.

(a) Lássuk be, hogy a valós síkon minden kör és egyenes egyenlete

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

alakba írható. Fordítva, minden ilyen egyenlet egyenest vagy kört ír le, amennyiben  $B^2 + C^2 > 4AD$ .

(b) Írjuk fel a  $z = x + iy \mapsto 1/z$  leképezés valós és képzetes részét. Ennek segítségével igazoljuk a  $z \mapsto 1/z$  speciális esetre a célt. Igazoljuk a célt a komplex affin transzformációkra is:  $z \mapsto pz + q$ ;  $p, q \in \mathbb{C}$ ,  $p \neq 0$ .

(c) Állítsunk elő minden törtlineáris leképezést  $z \mapsto 1/z$  és  $z \mapsto pz + q$  leképezések komponálásaként, és ezzel érjük el a végcélt.

HF 9.2 Dirichlet-feladatot fogunk megoldani a  $\mathbb{H}$  felső félsíkon: adott a  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$  határon egy nem feltétlen folytonos valós  $f$  függvény, és keresünk  $\mathbb{H}$  belsejében olyan harmonikus  $u$  függvényeket, melyek a határhoz közelítve  $f$ -hez tartanak.

- (a) •• Adjuk meg az egyetlen korlátos  $u_{a,b}(z)$  megoldását az

$$f(x) = \begin{cases} 1^\circ\text{C}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0^\circ\text{C}, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

Dirichlet-problémának. (Segítség: olyat már megoldottunk, hogy egy szögtartomány két szárán két különböző konstans volt a határfeltétel. Ezt a 180 fokos szögtartományra is meg tudjuk csinálni. Ezután használjuk a Laplace operátor linearitását.) Mik a megoldás izotermái?

- (b) • Számoljuk ki a  $\varphi_z^{\mathbb{H}}(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_{a,a+\varepsilon}(z)}{\varepsilon}$  deriváltat, és írjuk fel ennek segítségével általános folytonos  $f$  peremfeltételre az  $u$  kiterjesztést. Azaz vegyük észre, hogy ez a  $\varphi_z^{\mathbb{H}}(a)$  pont a  $\partial\mathbb{H}$  határ  $z$ -ből nézett  $\nu_z^{\mathbb{H}}$  harmonikus mértékének  $\frac{d\nu_z^{\mathbb{H}}(a)}{da}$  sűrűségfüggvénye. (Segítség a számoláshoz: Cauchy eloszlást kell kapnunk.)
- (c) •• Keressünk egy tört-lineáris  $g_z$  leképezést, ami  $\mathbb{H}$ -t a  $\mathbb{D}$  egységkörlapra viszi úgy, hogy a tetszőlegesen rögzített  $z \in \mathbb{H}$  pont képe a  $0 \in \mathbb{D}$  origó. Számoljuk ki a  $\nu_z^{\mathbb{H}}$  harmonikus mérték képét  $g_z$  mellett, azaz a

$$\varphi_0^{\mathbb{D}}(u) = \frac{\varphi_z^{\mathbb{H}}(g_z^{-1}(u))}{|g'(g_z^{-1}(u))|}$$

sűrűségfüggvényt. Igazából már a HF 8.5-ből tudjuk, hogy minek kell kijönnie. (Számolási segítség: tegyük föl az egyszerűség kedvéért, hogy  $z = i$ . És érdemes  $u = \cos \alpha + i \sin \alpha$  után  $\cos \alpha$  és  $\sin \alpha$ -val kifejezni mindent.)

HF 9.3 (Bónusz)

- (a) • Előadáson volt a  $J : z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  leképezés. Mit tesz az egységkörrel, annak belsejével és külsejével? Vázold föl annak a körvonalnak a képét, aminek a középpontja  $-\varepsilon + i\delta$ , kicsi  $\varepsilon, \delta > 0$  számokkal, mondjuk kb.  $\delta = 0.05$ , és  $(1 + \varepsilon)^2 + \delta^2 = (1 + \delta)^2$ , a sugara pedig  $1 + \delta$ . Mire emlékeztet a kapott görbe? (A következő HF az örvénylésmentes összenyomhatatlan vektormezőről részben megmagyarázza a hasonlóságot.)
- (b) • Hasonlóan az előző (c) feladathoz, adjuk meg az egységkörvonalon vett egyenletes mérték képét a  $J$  leképezés mellett. Vegyük észre, hol robban föl a sűrűségfüggvény. Ezért működik a villámhárító.

HF 9.4 •• Vegyük a  $D$  45°-os szögtartományt  $\mathbb{C}$ -ben, melyet az  $e = \mathbb{R}_{\geq 0}$  és  $f = e^{\pi i/4} \mathbb{R}_{\geq 0}$  félegyenesek határolnak. Keressünk  $V : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  sima vektormezőt, mely

- a határon  $V|_e = (1, 0)$  és  $V|_f = (-1, -1)/\sqrt{2}$ ,
- örvénylésmentes (azaz rotációmentes, ami pontosan akkor, ha  $V = \nabla\varphi$  valamilyen  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre), és
- összenyomhatatlan (ami a fenti (D) szerint ugyanaz, mint  $\text{div } V = 0$  mindenütt).

Segítség: előadáson megállapítottuk, hogy  $0 = \text{div } V = \text{div } \nabla\varphi = \Delta\varphi$ , tehát először is egy harmonikus fgv-t keresünk, és azt biztos könnyebb lenne a  $\mathbb{H}$  180°-os szögtartományban megtenni, majd konforminvarianciát használni.

HF 9.5 •• Legyen az  $u(x)$  skalármennyiség az  $x \in \mathbb{R}^n$  függvénye, és  $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Tegyük föl, hogy  $u$  radiális, azaz  $x$ -től csak  $r$ -en keresztül függ,  $u(x) = v(r)$  alakú. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad \text{és} \quad \Delta u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot v'(r).$$

Ebből vezessük le, hogy ha  $u$  harmonikus  $\forall x \neq 0$ -ban, akkor  $v(r) = b \log r + c$ , ha  $n = 2$ , illetve  $v(r) = b/r^{n-2} + c$ , ha  $n \geq 3$ . Ezt hívják Green függvénynek. (Amennyiben kellene közdiffr segített: érdemes  $\log'(v'(r))$ -re gondolni.)

HF 9.6 **•••** (Bónusz) **Egydimenziós hőegyenlet.** Legyen  $u(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ .

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

pontosan akkor, ha

$$(1) \quad 4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad (z > 0).$$

(b) Mutassuk meg, hogy (1) általános megoldása

$$v(z) = a \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + b.$$

(Lásd [http://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_differential\\_equation](http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_differential_equation), ha közönséges differenciálegyenletekből segítség kell.)

(c) Lássuk be, hogy ha  $u$  egy megoldás, akkor  $\partial_x u$  is az.

(d) Tehát: differenciáljuk az előbb kapott  $u(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ -t  $x$  szerint, majd válasszuk meg megfelelően a  $a$  konstanst, hogy pont az egydimenziós fundamentális megoldást kapjuk:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

*Megjegyzés:* Azért választottuk így az  $a$ -t, mert ennek a megoldásnak a hely szerinti integrálja minden  $t$ -re 1. Honnan is tudjuk ezt?