Matematika A4
X. gyakorlat

1. X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$$f(x,\, y) = \begin{cases} 60xy^2 & \text{, ha } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$
Határozzuk meg a kovarianciájukat.

2. X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } 0 < x < \infty,\ 0 \le y \le x, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$
Határozzuk meg a kovarianciájukat.

3. X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\, \mathrm{e}^{-(y+x/y)} & \text{, ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$
Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X,\, Y) = 1$.

4. Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

5. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X,\, Y)$-t. Függetlenek-e X és Y?

6. Legyenek $X_1,\, X_2,\, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással, és legyen $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$. Határozzuk meg $\mathbf{Cov}(Y_n,\, Y_{n+j})$ értékét minden $j \ge 0$-ra.

7. Ha $X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4$ páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki
   (a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;
   (b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

   korrelációs együtthatóját.

8. Bizonyos kaszinókban a következő kockajátékot játszák: az A játékos dob egy kockával, azután a B játékos is dob egy kockával. Ezt követően a Bank is dob egy kockával, és az a játékos nyer, akinek a dobása magasabb volt a Bank dobásánál (mindkét játékos is nyerhet egyszerre). Legyen
$$X := \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \qquad Y := \begin{cases} 1 & \text{, ha } B \text{ nyer,} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy X és Y pozitívan korreláltak. Magyarázzuk meg szóban is ezt az eredményt.

9. Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1-p$ valószínűséggel. Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

(a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

(b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az X_i, X_j, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.)

10. Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1 - \lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ-t használnunk?

11. Ha $Y = aX + b$, mutassuk meg, hogy

$$\varrho(X, Y) = \begin{cases} +1 & \text{, ha } a > 0, \\ -1 & \text{, ha } a < 0. \end{cases}$$

12. Ha Z standard normális eloszlású, akkor mennyi $\mathbf{Cov}(Z, Z^2)$?

13. Legyen Z standard normális eloszlású, és $Y = a + bZ + cZ^2$. Mutassuk meg, hogy

$$\varrho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

14. Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.