Ötödik A4 gyakorlat

1. Elméleti összefoglaló

1. *Diszkrét eloszlás:*
   Adottak egy X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei: $x_1, x_2, \dots$, és a súlyfüggvénye (az értékek valószínűségei): $p(x_i) = p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$.

   X *módusza*: a legvalószínűbb x_i érték.

2. *Nevezetes eloszlások*

   - *Binomiális eloszlás*:
     Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n-szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej (tehát lehet, hogy hamis), akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

     $$P(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

     Például, pontosan 3 hatos valószínűsége 20 dobásból: $P(X = 3) = \binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$.

   - *Hipergeometrikus eloszlás*:
     A darab piros, és B darab fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k darab piros golyót húzzunk ki:

     $$P(X = k) = h(k; A, B, n) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}} \qquad (k = \max(0, n-B), \dots, \min(A, n)).$$

     Például, 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$.

   - *Geometriai eloszlás (optimista)*:
     Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista, p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége mindig p:

     $$\mathbb{P}(X = k) = g(k; p) = (1-p)^{k-1} p \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

   - *Geometriai eloszlás (pesszimista)*:
     Hány nemhatost dobok az első hatos dobás előtt? $P(X = k) = (5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista, p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége mindig p:

     $$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

- *Negatív binomiális eloszlás (optimista)*:
  Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X=k)=\binom{k-1}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-3}(1/6)=$
  $\binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$. Általánosabban: a siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérletet (egymástól függetlenül) elvégezni, hogy megkapjuk az n-edik sikert:

  $$\mathbb{P}(X=k)=n(k;n,p)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} \qquad (k=n,n+1,n+2,\dots).$$

- *Negatív binomiális eloszlás (pesszimista)*:
  Hány nemhatost dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X=k)=\binom{k+2}{2}(1/6)^2(5/6)^k(1/6)=$
  $\binom{k+2}{2}(1/6)^3(5/6)^k$. Általánosabban: a siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, független kísérleteknél hány kudarc előzi meg az n-edik sikert:

  $$\mathbb{P}(X=k)=\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k=\binom{-n}{k}p^n(-q)^k \qquad (k=0,1,2,\dots;q=1-p).$$

- *Poisson-eloszlás*
  Ha az X valószínűségi változó a $0,1,2,\dots$ értékeket veheti fel és

  $$\mathbb{P}(X=k)=p(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

  ahol $\lambda>0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük.

3. *Várható érték*
   A lehetséges kimeneteleket jelöljük x_i-vel, a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig $p(x_i)$-vel vagy p_i-vel. Ekkor a várható érték: $\mathbb{E}(X)=\sum_i p(x_i)\cdot x_i$.

   A nagy számok törvénye (tétel) szerint a kisérletszám növekedésével a kisérleti eredmények számtani átlaga tart az elméleti úton kiszámolt várható értékhez.

   X helyett tekinthetjük $t(X)$-et, azaz X egy függvényét (például a kockadobás eredményeit négyzetre emeljük). A $t(X)$ várható értékére a következő összefüggés adódik: $\mathbf{E}(t(X))=\sum_i p(x_i)\cdot t(x_i)$.

   Jelöljük X-szel a kockadobás eredményét. X^2 várható értékét szemléletesen úgy is kiszámolhatnánk, hogy a kocka oldalaira új címkéket ragasztanánk $1,4,9,16,25,36$ számokkal. Így nem meglepő, hogy a képletekben a p_i értékek változatlanok maradnak, míg x_i-t mindenhol formálisan kicseréljük $t(x_i)$-re.

4. *Nevezetes eloszlások várható értékei*
   Az (A,B,n) paraméterű hipergeometriai eloszlás várható értéke: $E(X)=n\frac{A}{A+B}$.
   Az (n,p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke: $E(X)=np$.
   A p paraméterű optimista geometriai eloszlás várható értéke $E(X)=\frac{1}{p}$.
   Az (n,p) paraméterű optimista negatív binomiális eloszlás várható értéke $E(X)=\frac{n}{p}$.
   A λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke λ.

2. Nevezetes eloszlások

1. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?
   a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?
   b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?
   c) a 12. autó a harmadik piros?

2. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?

b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?

c) hány terméket szállított két leállás között?

d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza.)

3. Határozza meg a hipergeometrikus eloszlás móduszát!

4. Határozza meg a binomiális eloszlás móduszát!

5. Határozza meg a geometriai eloszlás móduszát!

3. Poisson eloszlás

6. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tűzeset van?

7. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van. (Számoljuk ki a korábban tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás segítségével is!)

8. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négy tűzeset ugyanolyan relatív gyakorisággal fordul elő, mint az öt tűzeset. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a két tűzeset!

9. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

10. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van?

11. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy öt.

    a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?

    b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?

    c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

12. Mennyi annak a valószínusege, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k db öttalálatos szelvény lesz? Mi a valószínűsége, hogy a főnyereményen meg kell osztozni?

13. Percenként átlagosan 2 hívás érkezik a tudakozó központba. Mi annak a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:05 között legalább 4 hívás érkezik?

14. A „Kocogj velünk!” mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

15. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?

4. Várható érték

16. Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?

17. A diszkrét X valószínűésgi változó súlyfüggvénye: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ $(x = 1, 2, 3, 4)$. Mennyi X várható értéke? És X^2 várható értéke? $E(\frac{1}{X}) =$?

18. Albert és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-ot kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

19. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzék meg?

20. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, egy szelvénnyel fogadva mennyi a nyereségünk várható értéke?

21. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?

22. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

23. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X-szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a) Adjuk meg az X valószínűségi változó eloszlását! b) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét!

24. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p, illetve $q(= 1 - p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?

25. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beszámítjuk? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

26. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.

    a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?
    b) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?

27. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

28. Piroska és Zoli kockáznak. Piroska feldob egy piros, Zoli feldob egy zöld kockát. Ha Piroska 1-et vagy 2-t dob, ő nyer, és kap Zolitól 5 Ft-ot; ha Zoli 6-ot dob, ő a nyertes, és 11 Ft-ot kap Piroskától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszere dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem elölről kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Ferit, dobáljon ő egyetlen fehér kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes-e elfogadni Piroskának Zoli ajánlatát?

29. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

30. Mennyi az ötös lottón a találatok számának várható értéke?