Megoldás

① Az inverz mátrixot sorműveletekkel fogjuk kiszámolni.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 8 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} s_1 \\ s_2 - s_1 \\ s_3 - s_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 8 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} s_1 - 4s_3 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -36 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{matrix} s_1 + 12 s_2 \\ s_2 \\ s_3 - 10/3\, s_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & -7 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7/3 & -10/3 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} s_1/9 \\ s_3/2 \\ s_2/3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/9 & 4/3 & -4/9 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 & -5/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az inverz mátrix

$$A = \begin{bmatrix} -7/9 & 4/3 & -4/9 \\ 7/6 & -5/3 & 1/2 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

② ~~[illegible]~~ Kiszámoljuk az ~~A|b~~ bővített és az A együtthatómátrix rangját.

$$r\left(\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & a & b & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & b-3 \end{array}\right]\right) = r\left(\begin{matrix} s_1 \\ s_2 - s_1 \\ s_3 + 3s_1 \\ s_4 \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & a+3 & b-3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & b-3 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & a+3 & b-3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & b-3 \end{array}\right]\right) =$$

$$= r\left(\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 - s_2 \\ s_4 - s_2 \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & a & b-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b-8 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b-8 \end{array}\right]\right) = r\left(\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 - (b-7)s_4 \\ s_4 \end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & -(b-7)(b-8) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b-8 \end{array}\right]\right)$$

$$= r\left(\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & -(b-7)(b-8) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

Látható, hogy ha $a \neq 0$, akkor $r(A) = r(A|b) = 4$, tehát 1 megoldás van. Ha $a = 0$ és $b \neq 7; 8$, akkor $r(A) = 3$ és $r(A|b) = 4$, tehát nincs megoldás. Ha $a = 0$ és $b = 7$ vagy $b = 8$, akkor $r(A) = r(A|b) = 3$, tehát ∞ megoldás van.

③ λ sajátérték $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda E_3) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2-\lambda \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \cdot (-\lambda) + 2 \cdot 6\lambda =$$

$$= -\lambda \cdot \left((1-\lambda)(2-\lambda) - 12 \right) = -\lambda \cdot \left(\lambda^2 - 3\lambda - 10 \right).$$

A $-\lambda(\lambda^2-3\lambda-10)=0$ egyenlet megoldásai $\lambda_1=0$,

$\lambda_{2;3} = \dfrac{3\pm\sqrt{9+40}}{2} = \dfrac{3\pm 7}{2} \begin{array}{l} \nearrow 5 \\ \searrow -2 \end{array}$. A sajátvektorok:

$\lambda=0$:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2/2 \\ s_3/3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3-s_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A megfelelő egyenletek: $x+2z=0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}x$

$2x+y=0 \Rightarrow y = \cancel{-\frac{1}{2}x}\ -2x$, azaz a

sajátvektorok: $v = \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ -\frac{1}{2}x \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

$\lambda=5$:
$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ s_2 \\ s_3+s_1 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 10 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3+\frac{5}{2}s_1 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az egyenletek: $-4x+2z=0 \Rightarrow z = +2x$

$4x-3y=0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$, a sajátvektorok: $v = \cancel{\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ \frac{4}{3}x \end{bmatrix}}\ \begin{bmatrix} x \\ 4x/3 \\ 2x \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

$\lambda=-2$:
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3-s_1 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2/4 \\ s_3/3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3-s_2 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az egyenletek: $3x+2z=0 \Rightarrow z = -\frac{3}{2}x$

$x+y=0 \Rightarrow y=-x$, a sajátvektorok: $v = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ -3/2\,x \end{bmatrix}$, $x \in$ [illegible], $x \neq$ [illegible]

4) Az egyenlet egy elsőrendű, inhomogén lineáris differenciálegyenlet.

A homogén megoldása: $y' + \cos x\, y = 0$

$$y' = -\cos x\, y$$

$$\frac{y'}{y} = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{Y}\,dY = \int -\cos x\,dx$$

$$\ln|Y| = -\sin x + \ln|C|$$

$$Y = C\cdot e^{-\sin x}$$

Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = k(x)\cdot e^{-\sin x}$ alakban keressük. Ekkor $y_p' = k'(x)\, e^{-\sin x} + k(x)\cdot e^{-\sin x}\cdot(-\cos x)$.
Visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe:

$$k'(x)\cdot e^{-\sin x} - \cos x\cdot k(x)\cdot e^{-\sin x} + \cos x\, k(x)\, e^{-\sin x} = \sin x\cos x$$

$$k'(x) = \sin x\cos x\cdot e^{\sin x}$$

$$\int \sin x\cos x\, e^{\sin x}\,dx = \sin x\, e^{\sin x} - \int \cos x\, e^{\sin x}\,dx = \sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x} + C$$

$f = \sin x \qquad f' = \cos x$

$g' = \cos x\, e^{\sin x} \qquad g = e^{\sin x}$

Tehát $y_p = (\sin x\cdot e^{\sin x} - e^{\sin x})\, e^{-\sin x} = \sin x - 1$. Ebből az inhomogén általános megoldása $y = Y + y_p = C e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

5. Legyen $\mathcal{L}\, y = Y(t)$ és $\mathcal{L}\, z = Z(t)$. Ekkor a Laplace-transzformált tulajdonságai alapján: $\dot y = t\cdot Y - y(0) = t\cdot Y - 2$ és $\dot z = t\cdot Z - z(0) = t\cdot Z$.
Tehát az egyenletrendszer Laplace-transzformáltja:

$$\left.\begin{aligned} t\cdot Y - 2 &= Y + Z \\ tZ &= 4Y + Z \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása $Z = \frac{-8}{(t-1)^2+4} = -4\cdot\frac{2}{(t-1)^2+2^2}$, és $Y = \frac{2(t-1)}{(t-1)^2+4} = 2\cdot\frac{t-1}{(t-1)^2+2^2}$. Az inverz Laplace-transzformáció tulajdonságai esetén $y = 2e^x\cos 2x$, $z = -4e^x\sin 2x$.