Vizsga megoldása

2023.07.05.

Ⓐ Legyenek $f_1,\dots,f_n$ legalább $(n-1)$-szer deriválható függvények. Ekkor $f_1,\dots,f_n$ Wronski-determinánsa
$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Ⓑ Legyen egy lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa A, kibővített mátrixa $A|b$, és ismeretleneinek száma n. Az egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha $r(A)=r(A|b)$, és akkor létezik egyetlen megoldása, ha $r(A)=r(A|b)=n$.

Ⓒ Legyen $f: D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ n-változós függvény minden változója szerint parciálisan deriválható P_0-ban. Ekkor f P_0-beli gradiense $(\operatorname{grad} f)(P_0)=(f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0),\dots, f'_{x_n}(P_0))$.

①
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -5 & 6 & -5 \end{array}\right] \sim \cancel{\begin{array}{c} r_1-3r_2 \\ r_2 \\ r_3-2r_2 \\ r_4-3r_2 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 12 & -7 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right]} \sim \cancel{\begin{array}{c} r_1-4r_3 \\ r_2+2r_3 \\ r_3 \\ r_4-7r_3 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -20 & 21 & -23 \\ 1 & 0 & 13 & -12 & 13 \\ 0 & -1 & 8 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -52 & 49 & -51 \end{array}\right]}$$

$$\sim \begin{array}{c} r_1-3r_2 \\ r_2 \\ r_3-2r_2 \\ r_4-3r_2 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -8 & 12 & -7 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} r_1-8r_3 \\ r_2+2r_3 \\ r_3 \\ r_4-7r_3 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -52 & 49 & -51 \\ 1 & 0 & 13 & -12 & +13 \\ 0 & -1 & 8 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -52 & 49 & -51 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} r_1 \\ r_2+\frac{1}{4}r_1 \\ r_3+\frac{2}{13}r_1 \\ r_4+r_1 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -52 & 49 & -51 \\ 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1 & 0 & 7/13 & -11/13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = +\frac{51}{52}+\frac{49}{52}x_4 \\ x_1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = +\frac{11}{13}+\frac{7}{13}x_4 \end{array}$$

$x_4\in\mathbb{R}$ tetszőleges

② A mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem 0. A Sarrus-szabály alapján:

$$\det(B) = (-7)\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot a + a\cdot(-1)\cdot(-2) - (-7)\cdot 1\cdot(-2) - 1\cdot(-1)\cdot(-1) - a\cdot 3\cdot a =$$
$$= 21 + a + 2a - 14 - 1 - 3a^2 = -3a^2+3a+6 = -3(a^2-a-2) = -3(a+1)(a-2),$$

tehát B pontosan akkor invertálható, ha $a\neq -1$ és $a\neq 2$.

③ Ez egy elsőrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenlet. A hozzátartozó homogén egyenlet megoldása:

$$y = C\cdot e^{-\int \operatorname{tg} x\,dx} = C\cdot e^{\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx} = C e^{\ln|\cos x|} = C\cdot\cos x.$$

Egy ~~A~~ partikuláris megoldást az állandó variálásának módszerével ~~keressük~~ keressünk:

$$y_p = k(x)\cdot\cos x \Rightarrow y_p' = k'\cos x - k\sin x \Rightarrow k'\cos x - k\sin x + k\cdot\cos x\cdot\operatorname{tg} x = e^{2x}\cos x$$

$$\Rightarrow k' = e^{2x} \Rightarrow k = \frac{e^{2x}}{2} \Rightarrow y = Y + y_p = C\cos x + \frac{e^{2x}}{2}\cos x.$$

A keresett partikuláris megoldásra $2 = C\cdot\cos 0 + \frac{e^0}{2}\cos 0 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$.

Tehát a keresett partikuláris megoldás $y_{part.} = \frac{3}{2}\cos x + \frac{e^{2x}}{2}\cos x$.

4. Ez egy állandó együtthatós, másodrendű lineáris, inhomogén differenciálegyenlet. A karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$

$\lambda_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1\pm\sqrt{-1} = 1\pm i$. Tehát a homogén általános megoldása

$Y = C_1 e^x\cos x + C_2 e^x\sin x$. Az inhomogén egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével keressük: $y_p = Ae^x \Rightarrow y_p' = Ae^x = y_p'' \Rightarrow$

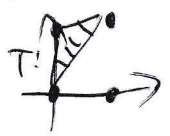
$$Ae^x - 2Ae^x + 2Ae^x = 2e^x \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y = Y + y_p = C_1 e^x\cos x + C_2 e^x\sin x + 2e^x.$$

5. $f'_x(x,y) = \frac{1}{y^2} + e^{x+2y}$, $f'_y(x,y) = -\frac{2x}{y^3} + 2e^{x+2y}$. Ezek folytonosak P_0-ban, azaz f totálisan deriválható P_0-ban, tehát

$f'_v(2,-1) = (\operatorname{grad} f)(2,-1)\cdot\frac{v}{|v|}$. Mivel $f'_x(2,-1) = 2$, $f'_y(2,-1) = 6$, így

$(\operatorname{grad} f)(2,-1) = (2,6)$, és $\frac{v}{|v|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Tehát $f'_v(2,-1) = (2,6)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}$.

6. T határai: $x=0$, $y=1$ és $y=x$. Az integrálás határai: $0\le x\le 1$, $x\le y\le 1$.



Tehát $$\iint_T \frac{1}{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_x^1 \frac{1}{1+x^2}\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{1+x^2}\right]_x^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

7. $$\frac{1}{\varrho} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{n-1}}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}}}{(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^2} = 2,$$ tehát $\varrho = \frac{1}{2}$.

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^{n-1}}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Mivel $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergens ($2>1$), ezért ez is.

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergens. Tehát a konvergenciatartomány $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.