A2 vizsga, megoldás 2023.06.07.

(A) Legyen $f: D \to \mathbb{R}$ egy n-változós függvény, melynek minden második parciális deriváltja létezik P_0-ban. Ekkor f Hesse mátrixa P_0-ban:

$$H(P_0) = \begin{bmatrix} (\partial_{x_1}\partial_{x_1} f)(P_0) & \dots & (\partial_{x_1}\partial_{x_n} f)(P_0) \\ \vdots & & \\ (\partial_{x_n}\partial_{x_1} f)(P_0) & \dots & (\partial_{x_n}\partial_{x_n} f)(P_0) \end{bmatrix}$$

(B) Legyen $A = [a_{ij}]$ egy $(n\times n)$-es mátrix, melynek az (i,j)-edik előjeles aldeterminánsát jelölje $\bar{A}_{ij}$. Ekkor tetszőleges $1 \le i \le n$ egészre

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \bar{A}_{ij}.$$

(C) Legyenek g_1, g_2 folytonos függvények $[a,b]$-n, és legyen f folytonos a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ normáltartományon. Ekkor f integrálható D-n, és

$$\iint_D f \,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(1) Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} o_1 & o_2 - o_1 & o_3 - o_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & a^2-1 & b^2-1 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \cdot \left[(a-1)(b^2-1) - (a^2-1)(b-1) \right] =$$

$$= (a-1)(b-1) \cdot \left[(b+1) - (a+1) \right] = (a-1)(b-1)(b-a).$$

Tehát A pontosan akkor nem invertálható, ha $a=1$, $b=1$ vagy $a=b$.

(2) Megnézzük, hogy $\det(A - \lambda E_3) = 0$ mikor teljesül.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 3 + 6 - (1-\lambda) + 3(2-\lambda) - 6(2-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda =$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4) \Rightarrow \text{ a sajátértékek } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4.$$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 - 3s_1 \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -z,\ y = z \\ \underline{v} = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix},\ z \neq 0 \end{array}$$

$\lambda_2=1$

$$\begin{bmatrix}0&-1&2\\3&1&1\\3&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-1&2\\3&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}s_1\\ \sim s_2+s_1\\ s_3\end{matrix}\begin{bmatrix}0&-1&2\\3&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow y=2z,\ x=-z$$

$$\underline{v}=\begin{bmatrix}-z\\2z\\z\end{bmatrix},\ z\neq 0$$

$\lambda_3=4$

$$\begin{bmatrix}-3&-1&2\\3&-2&1\\3&1&-2\end{bmatrix}\begin{matrix}s_1\\ \sim s_2+s_1\\ s_3+s_1\end{matrix}\begin{bmatrix}-3&-1&2\\0&-3&3\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-3&-1&2\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-3&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow 3x=z,\ y=z\Rightarrow 3x=y$$

$$\underline{v}=\begin{bmatrix}x\\3x\\3x\end{bmatrix},\ x\neq 0$$

3. $(2x+1)y'-3y=0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{2x+1}\ (y\neq 0)\Rightarrow \displaystyle\int\frac{y'}{y}dx=\int\frac{3}{2x+1}dx\Rightarrow\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{3}{2x+1}dx$

$\Rightarrow \ln|y|=\dfrac{3}{2}\ln|2x+1|+\ln|C| \Rightarrow y=C\cdot(2x+1)^{3/2}$. ~~és~~ ha $C=0$, ebből $y=0$, tehát az összes megoldás $y=C(2x+1)^{3/2}$.

4. Legyen $\mathcal{L}\{y\}(s)=Y$. Ekkor $\mathcal{L}\{y'\}(s)=s\cdot Y-y(0)=s\cdot Y$, és $\mathcal{L}\{y''\}(s)=s^2\cdot Y$.
~~Behelyett~~ $\mathcal{L}\{1\}(s)=\dfrac{1}{s}$. Behelyettesítve: $s^2Y+4sY+3Y=\dfrac{1}{s}\Rightarrow Y=\dfrac{1}{s(s^2+4s+3)}=$

$=\dfrac{1}{s(s+3)(s+1)}$. Parciális törtekre bontunk: $\dfrac{1}{s(s+3)(s+1)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+3}+\dfrac{C}{s+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1=A(s+3)(s+1)+Bs(s+1)+C(s+3)s$. $s=0$, $s=-1$, $s=-3$ értékeket behelyettesítve $1=3A$, $1=-2C$, $1=6B$ adódik, melyből $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{6}$, $C=-\frac{1}{2}$.

Tehát $Y=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+1}\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot e^{-3x}-\dfrac{1}{2}\cdot e^{-x}$.

5. $f'_x(x;y)=2x\cdot e^{-y}$,
$f'_y(x;y)=2y\cdot e^{-y}-(x^2+y^2)e^{-y}$.

Ha $\left.\begin{matrix}2xe^{-y}=0\\ (2y-x^2-y^2)e^{-y}=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=0\Rightarrow 2y-y^2=0\Rightarrow y_1=0,\ y_2=2.$

Két stacionárius pont van: $P_1(0;0)$, $P_2(0;2)$.

$f''_{xx}(x;y)=2e^{-y}$, $f''_{xy}(x;y)=f''_{yx}(x;y)=-2xe^{-y}$, $f''_{yy}(x;y)=(x^2+y^2-4y+2)e^{-y}$.

Ebből

$H(0;0)=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $H(0;2)=\begin{bmatrix}2e^{-2}&0\\0&-2e^{-2}\end{bmatrix}$ $\det H(0;0)=4>0$ és $f''_{xx}(0;0)=2>0\Rightarrow$ lok. min., értéke $f(0;0)=0$

$\det H(0;2)=-4e^{-4}<0\Rightarrow$ nincs lok. szélsőérték

(6) A Fubini-tétel alapján

$$\iint_T x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2+1} x\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{y^2+1} dy = \int_0^1 \frac{(y^2+1)^2}{2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^4+2y^2+1\,dy = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y^5}{5}+2\cdot\frac{y^3}{3}+y\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \frac{14}{15}$$

(7) $f(x) = \frac{3}{2-x} = \frac{3}{-3-(x-5)} = -\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-5}{3}\right)^n$, ha $\left|-\frac{x-5}{3}\right|<1$

a mértani sor összegképletét használva. Ebből $\left|-\frac{x-5}{3}\right|<1 \Leftrightarrow |x-5|<3$, tehát

$$\frac{3}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}\cdot(x-5)^n, \text{ ha } |x-5|<3.$$