Megoldás

1) Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & -2 & 14 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2-2s_1 \\ s_3-3s_1 \\ s_4-s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1-s_4 \\ s_2-2s_4 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$x_1 = 5 - x_4 + x_5$

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_5$

$x_3 = 2 + x_4 + 2x_5$

$x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ tetszőleges

2) A Sarrus-szabályt alkalmazva

$\det A = 0\cdot 0\cdot 0 + a\cdot a\cdot a + b\cdot b\cdot b - 0\cdot a\cdot b\cdot 3 = a^3 + b^3$

Egy mátrix pontosan akkor reguláris, ha a determinánsa nem 0. Tehát A reguláris $\Leftrightarrow -a^3 \neq b^3 \Leftrightarrow -a \neq b \Leftrightarrow a+b \neq 0$.

3) $\det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$

Tehát a karakterisztikus polinom gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$. Ezek a sajátértékek. A hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$\underline{\lambda_1 = 0}$: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z = y,\ x = -\frac{y}{2}$

$\underline{v} = y \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y \neq 0$

$\underline{\lambda_2 = -3}$: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = x/2,\ z = x$

$\underline{v} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, x \neq 0$

$\underline{\lambda_3 = 3}$: $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = x,\ z = -\frac{x}{2}$, $\underline{v} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$

(4) Először kiszámoljuk az általános megoldást.

$$xy' = y\ln y \Rightarrow \frac{y'}{y\ln y} = \frac{1}{x}\ (y \neq 1) \Rightarrow \int \frac{y'}{y\ln y}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y\ln y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln|\ln y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln y = Cx \Rightarrow y = e^{Cx}.$$

Emellett megoldás $y=1$, ami előáll a $C=0$ választással.
Tehát az összes megoldás $y = e^{Cx}$ $(C \in \mathbb{R})$. A keresett partikuláris megoldás teljesíti az $y(1)=e$ feltételt, az általános megoldásba behelyettesítve $e = e^{C\cdot 1} \Rightarrow C=1$, azaz $y_{part.} = e^{x}$.

(5) Az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet. A hozzátartozó homogén egyenlet $xY' - Y = 0$, melynek általános megoldása $Y = Ce^{-\int -\frac{1}{x}dx} = Cx$.

Az inhomogén egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével keressük: $y_p = k(x)\cdot x$. Ebből $y_p' = k'x + k$. Visszahelyettesítve:

$$x(k'x + k) - kx = x^3 + 1 \Rightarrow k' = x + \frac{1}{x^2}.$$

$\int x + \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C'$, így a $k = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$ választás megfelelő.

Ebből $y_p = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)x = \frac{x^3}{2} - 1$, és $y = Y + y_p = Cx + \frac{x^3}{2} - 1$.