Aláíráspótló vizsga M.O.

①

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2/2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} s_1-s_2 \\ s_2 \\ s_3-s_2 \\ s_4-s_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4+s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$0=2$ ↯

nincs m.o.

② A pontosan akkor invertálható, ha $\det(A)\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} o_1 & o_2-o_1 & o_3-o_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & a^2-1 & b^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & a^2-1 & b^2-1 \end{vmatrix} = 1\cdot\left[(a-1)(b^2-1)-(a^2-1)(b-1)\right] =$$

$$=(a-1)(b-1)\cdot\left[(b+1)-(a+1)\right] = (a-1)(b-1)(b-a).$$

Tehát A pontosan akkor nem invertálható, ha $a=1$, vagy $b=1$, vagy $a=b$.

③ Megnézzük, hogy $\det(C-\lambda E_3)=0$ mikor teljesül.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2-3+6-(1-\lambda)+3(2-\lambda)-6(2-\lambda) = -\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda =$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4). \Rightarrow$$ a sajátértékek: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$.

$\lambda_1=0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2-3s_1 \\ s_3-3s_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-z \\ y=z \end{array}$$

$$\underline{v}=\begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix},\quad z\neq 0$$

$\lambda_2=1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2+s_1 \\ s_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$y=2z$, $x=-z$

$$\underline{v}=\begin{bmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{bmatrix},\quad z\neq 0$$

$\lambda_3=4$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} s_1 \\ s_2+s_1 \\ s_3+s_1 \end{array} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$3x=z$, $y=z \Rightarrow y=3x$

$$\underline{v}=\begin{bmatrix} x \\ 3x \\ 3x \end{bmatrix},\quad x\neq 0$$

(4) ~~y~~ Egy lineáris inhomogén differenciálegyenletet kell megoldani.
A hozzátartozó homogén egyenlet $Y' + \frac{Y}{x} = 0$, melyből $Y = Ce^{-\int \frac{1}{x}dx} = C\cdot\frac{1}{x}$.
Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = k(x)\cdot\frac{1}{x}$ alakban keressük.

$$y_p' = k'\cdot\frac{1}{x} - k\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow k'\frac{1}{x} - k\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot k\cdot\frac{1}{x} + e^x = 0 \Rightarrow k' = -x\cdot e^x.$$

$$\int -xe^x dx = -x\cdot e^x - \int (-1)\cdot e^x dx = -xe^x + e^x + C \Rightarrow k(x) = -xe^x + e^x \text{ megfelelő.}$$

$f = -x,\quad f' = -1$

$g' = e^x,\quad g = e^x$

Azaz $y_p = -xe^x + e^x = \frac{1-x}{x}\cdot e^x$, és $y = Y + y_p = \frac{C}{x} + \frac{1-x}{x}e^x$ az inhomogén általános megoldása.

(5) $$(2x+1)y' - 3y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3}{2x+1}\quad (y \neq 0) \Rightarrow \int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{3}{2x+1}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{3}{2x+1}dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + \ln|C| \Rightarrow y = C\cdot(2x+1)^{3/2}$$

$C=0$ esetén ebből $y=0$, tehát az összes megoldás előáll a fenti alakban.