Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 12. hét

1. Számoljuk ki:

   a) $\iint_T y^2\,dT = ?\qquad T = \left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x\right\}$

   b) $\iint_T x^2y\,dT = ?\qquad T = \left\{(x,y)\,\middle|\, 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0, y \ge 0\right\}$

   c) $\iint_T 7xy^4\,dT = ?\qquad T = \left\{(x,y)\,\middle|\, 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \ge \sqrt{3}x\right\}$

   Megoldás a) Térjünk át síkbeli polárkoordinátarendszerre, azaz alkalmazzuk az $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ helyettesítést. Ekkor a tartományt meghatározó egyenlőtlenségek $r^2 \le 4$ és $0 \le r\sin\phi \le r\cos\phi$, azaz leegyszerűsítve $0 \le r \le 2$ és $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$. A transzformáció Jacobi-determinánsa a tanultak szerint r, azaz a transzformáció végrehajtása után az integrál:

$$\iint_T y^2\,dT = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\sin^2\phi\cdot r\,d\phi\right)dr = \int_0^2 r^3\,dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\phi\,d\phi = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2\cdot\left[\frac{\phi}{2}-\frac{\sin 2\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}-1.$$

   b) Síkbeli polárkoordinátarendszerben a tartományt meghatározó egyenlőtlenségek $1 \le r \le 2$ és $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$. Így az integrál:

$$\iint_T x^2y\,dT = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\phi\cdot r\sin\phi\cdot r\,d\phi\right)dr = \int_1^2 r^4\,dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\sin\phi\,d\phi =$$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2\cdot\left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{31}{15}$$

   c) Síkbeli polárkoordinátarendszerben a tartomány $2 \le r \le 3$ és $\sin\phi \ge \sqrt{3}\cos\phi \ge 0$, amiből $\frac{\pi}{3} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$. Így:

$$\iint_T 7xy^4\,dT = \int_2^3 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 7r^5\cos\phi\sin^4\phi\cdot r\,d\phi\right)dr = \int_2^3 7r^6\,dr\cdot\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin^4\phi\,d\phi =$$

$$= \left[r^7\right]_2^3\cdot\left[\frac{\sin^5\phi}{5}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2059\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{10}$$

2. Számítsuk ki az $\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dT$ integrál értékét, ha T az $4 \le x^2+y^2 \le 25$, $x \le 0$, $y \ge 0$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány.

   Megoldás Síkbeli polárkoordinátákat használva a tartomány $2 \le r \le 5$, $\frac{\pi}{2} \le \phi \le \pi$. Így

$$\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dT = \int_2^5 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{r\cos\phi\cdot r\sin\phi}{r}\cdot r\,d\phi\right)dr = \int_2^5 r^2\,dr\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\phi\sin\phi\,d\phi$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_2^5\cdot\left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{29}{2}.$$

3. Számoljuk ki az $x^2+y^2=1$ egyenletű henger és a $z=0$, valamint a $z = 2-x-y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát!

Megoldás Vegyük észre, hogy ha $x^2 + y^2 \leq 1$, akkor $0 \leq 2 - x - y$. Így a kérdéses térfogatot kiszámolhatjuk, mint az $f(x, y) = 2 - x - y$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 \leq 1$ egyenlőtlenséggel adott T körlapon, tehát $V = \iint_T 2 - x - y \, d(x, y)$. A kétváltozós integrált síkbeli polárkoordinátákra áttérés után számoljuk ki. Ekkor a tartomány $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Tehát:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2 - r\cos\phi - r\sin\phi)\, r \, d\phi \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 2r - r^2\cos\phi - r^2 \sin\phi \, d\phi \right) dr =$$

$$= \int_0^1 \left[2r\phi + r^2 \cos\phi - r^2 \sin\phi \right]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 4\pi r \, d\phi = \left[2\pi r^2 \right]_0^1 = 2\pi.$$

4. A V korlátos térrész határai a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, illetve a $z = 1$ egyenletű felületek. Számítsuk ki az $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ integrál értékét!

Megoldás A V térrészt az $x^2 + y^2 \leq 1$ és $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ egyenlőtlenségek határozzák meg. Hengerkoordinátákra áttérve az egyenlőtlenségek $0 \leq r \leq 1$, $r \leq z \leq 1$ és $0 \leq \phi \leq 2\pi$ alakúak. Mivel a Jacobi determináns r, így az integrál:

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV = \int_0^1 \left(\int_r^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2 d\phi \right) dz \right) dr = \int_0^1 \left(\int_r^1 \left[r^2 \phi \right]_0^{2\pi} dz \right) dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_r^1 2\pi r^2 dz \right) dr = \int_0^1 \left[r^2 z \right]_r^1 dr = \int_0^1 r^2 - r^3 dr = \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

5. Számoljuk ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ egyenletű felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

Megoldás Hengerkoordinátákban a két felület egyenlete $z = r$ és $z = 6 - r^2$. Mivel $r \geq 0$, az $r = 6 - r^2$ egyenlet egyetlen megoldása $r = 2$, és $0 \leq r \leq 2$ esetén $r \leq 6 - r^2$. Tehát a két felület által meghatározott korlátos részt a $0 \leq r \leq 2$, $r \leq z \leq 6 - r^2$ és $0 \leq \phi \leq 2\pi$ egyenlőtlenségek írják le, és a térfogat

$$\iiint_V 1\, dV = \int_0^2 \left(\int_r^{6-r^2} \left(\int_0^{2\pi} r d\phi \right) dz \right) dr = \int_0^2 \left(\int_r^{6-r^2} 2\pi r \, dz \right) dr = \int_0^2 \left[2\pi r z \right]_r^{6-r^2} dr =$$

$$= \int_0^2 -2\pi r^3 - 2\pi r^2 + 12\pi r \, dr = \pi \cdot \left[-\frac{r^4}{2} - \frac{2r^3}{3} + 6r^2 \right]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

6. Számítsuk ki az $\iiint_V xyz\, dV$ integrál értékét, ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb belsejének az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ térnyolcadba eső része.

Megoldás Gömbi polárkoordinátákra térünk át, azaz alkalmazzuk az $x = r\cos\theta\cos\phi$, $y = r\cos\theta\sin\phi$, $z = r\sin\theta$ koordinátatranszformációt. Ekkor az integrálási tartományt a $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ és $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ egyenlőtlenségek írják le. Minthogy a transzformáció Jacobi-determinánsa $r^2\cos\theta$, így:

$$\iiint_V xyz\,dV = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5\cos^3\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi\,d\phi \right) d\theta \right) dr =$$

$$= \int_0^1 r^5\,dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi\,d\phi = \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \cdot \left[-\frac{\cos^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{48}$$

7. Számoljuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ és a $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott térrész térfogatát!

Megoldás Gömbbi polárkoordinátákra áttérve az egyenlőtlenségek $0 \le r \le 1$ és $r\cos\theta \le r\sin\theta \le \sqrt{3}r\cos\theta$ alakúak, amiből az integrálás határai $0 \le r \le 1$, $0 \le \phi \le 2\pi$ és $\frac{\pi}{4} \le \theta\frac{\pi}{3}$. A térfogat:

$$V = \iiint_V 1\,dV = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\,d\phi \right) d\theta \right) dr =$$

$$= \int_0^1 r^2\,dr \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi} 1\,d\phi = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi}{3}.$$