Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 10. hét

1. Keressük meg a következő függvények lokális szélsőértékeit!

a) $f(x,y) = (x-3y+3)^2 + (x-y-1)^2$ b) $f(x,y) = (x-y+1)^2 - (x^2-2)^2$

c) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$ d) $f(x,y) = \dfrac{20}{x} + \dfrac{50}{y} + xy$

e) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

Megoldás a) A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = 2(x-3y+3) + 2(x-y-1) = 4x - 8y + 4;$$

$$f'_y(x,y) = 2(x-3y+3)(-3) + 2(x-y-1)(-1) = -8x + 20y - 16.$$

A függvény stacionárius pontjai az $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ egyenletrendszer megoldásai. Jelen esetben az egyetlen megoldás $P_0(3,2)$. Azt, hogy itt van-e lokális szélsőérték, a másodrendű parciális deriváltakból álló Hesse-determináns vizsgálatával döntjük el. A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 4; \qquad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -8; \qquad f''_{yy}(x,y) = 20.$$

A vizsgált pontban (és minden egyéb pontban) így a Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} = 4 \cdot 20 - (-8)^2 = 16 > 0,$$

tehát a függvénynek a vizsgált pontban van lokális szélsőértéke. Minthogy $f''_{xx}(3,2) = 4 > 0$, így a szélsőérték egy lokális minimum. A minimum értéke $f(3,2) = 0$.

b) Az elsőrendű parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = 2(x-y+1) - 2(x^2-2)(2x) = -4x^3 + 10x - 2y + 2; \qquad f'_y(x,y) = 2(x-y+1)(-1) = -2x + 2y - 2.$$

Megkeressük a stacionárius pontokat. A második deriváltat egyenlővé téve 0-val $y = x+1$ adódik. Ezt az első egyenletbe helyettesítve $-4x^3 + 8x = 0$, amiből $x = 0$, vagy $x = \pm\sqrt{2}$. Tehát a stacionárius pontok $P_1(0,1)$, $P_2(\sqrt{2}, \sqrt{2}+1)$ és $P_3(-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$. A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = -12x^2 + 10; \qquad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -2; \qquad f''_{yy}(x,y) = 2.$$

Így a Hesse determináns $D(x,y) = (-12x^2+10) \cdot 2 - (-2)^2 = 16 - 24x^2$. A vizsgált pontokban $D(P_1) = 16 > 0$, $D(P_2) = D(P_3) = -32 < 0$, tehát egyedül P_1-ben van lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(0,1) = 10 > 0$, ezért itt lokális minimum van. Ennek értéke $f(0,1) = -4$.

c) Az elsőrendű deriváltak

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 6x + 2y; \qquad f'_y(x,y) = 2x + 2y.$$

Így a stacionáris pontok $P_1(0,0)$ és $P_2\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$. A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 6x - 6; \qquad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2; \qquad f''_{yy}(x,y) = 2,$$

így a vizsgált pontokban a Hesse-determináns $D(P_1) = -16 < 0$ és $D(P_2) = 16 > 0$, tehát egyedül a P_2 pontban van lokális szélsőérték. Most $f''_{xx}\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right) = 10 > 0$, azaz P_2-ben lokális minimum van, melynek értéke $f(P_2) = -\frac{364}{27}$.

d) Az elsőrendű deriváltak

$$f'_x(x,y) = -20x^{-2} + y = y - \frac{20}{x^2}; \qquad f'_y(x,y) = x - \frac{50}{y^2}$$

Megkeressük azokat a pontokat, ahol mindkét derivált nulla. Az $y = \frac{20}{x^2}$ kifejezést a második deriváltba behelyettesítve az $x = \frac{x^4}{8}$ egyenlet adódik. Minthogy $x = 0$ esetén $f(x, y)$ nem értelmezett, az egyetlen megoldás az $x = 2$, melyből $y = 5$. Tehát az egyetlen stacionárius pont a $P(2, 5)$. A második deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{40}{x^3}; \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 1; \qquad f''_{yy}(x, y) = \frac{100}{y^3},$$

amiből $D(2, 5) = 3 > 0$, tehát P-ben van lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(2, 5) = 5$, ez minimum, melynek értéke $f(2, 5) = 30$.
e) Az elsőrendű deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 4y - 4x^3; \qquad f'_y(x, y) = 4x - 4y^3.$$

Ebből az előző feladatokhoz hasonlóan kaphatók a stacionárius pontok: $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(-1, -1)$. A másodrendű deriváltak kiszámolása után adódik a Hesse-determináns: $D(x, y) = 144x^2y^2 - 16$. Mivel $D(0, 0) = -16 < 0$, $D(1, 1) = D(-1, -1) = 128 > 0$, így P_2-ben és P_3-ban van lokális szélsőérték. Minthogy $f''_{xx}(1, 1) = f''_{xx}(-1, -1) = -12 < 0$, ezekben a pontokban lokális maximum van, melyek értéke $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$.

2. Keressük meg az $x^2 + y^2 + y - 1$ függvény maximumát és minimumát az $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ halmazon!

Megoldás Vizsgáljuk meg először a lehetséges szélsőértékhelyeket a halmaz belsejében. Mivel $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1$ minden pontban (totálisan) deriválható, így a halmaz belsejében f csak stacionárius pontokban veheti fel a szélsőértékeit. A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 2x; \qquad f'_y(x, y) = 2y + 1,$$

melyek egyetlen zérushelye a $P_1\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ pont. Minthogy P_1 a halmaz belsejében van, P_1 egy lehetséges szélsőértékhely.
Előfordulhat, hogy egy szélsőérték a halmaz határán található. A halmaz határpontjainak koordinátáira teljesül az $x^2 = 1 - y^2$ összefüggés, ahol $-1 \leq y \leq 1$. Tehát ezekben a pontokban az f függvény értéke $g(y) = (1 - y^2) + y^2 + y - 1 = y$. Ezen egyváltozós függvénynek a $[-1, 1]$ intervallum belsejében nincs lokális szélsőértéke, globális szélsőértékei az $y = \pm 1$ helyen találhatók. Ezekben a pontokban $x = 1 - (\pm 1)^2 = 0$, tehát a határpontok közti lehetséges szélsőértékhelyek a $P_2(0, -1)$ és a $P_3(0, 1)$ pontok. Így f minimuma és maximuma a megadott halmazon az $f(P_1) = -\frac{5}{4}$, $f(P_2) = -1$ és $f(P_3) = 1$ értékek közül kerül ki. Tehát a megadott halmazon f a $P_1\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ pontban minimális és minimuma $f(P_1) = -\frac{5}{4}$, míg a $(0, 1)$ pontban maximális, és maximuma $f(0, 1) = 1$.

3. Legyen $f(x, y) = x^3y^5$. Keressük meg f lokális szélsőértékeit! Keressük meg f minimumát és maximumát a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ csúcsok által meghatározott háromszöglapon!

Megoldás A függvény maximuma és minimuma lehet a háromszög belsejében, valamelyik élének belsejében, valamint valamelyik csúcsban. A háromszöglap belsejében mindegyik lehetséges szélsőértékhely egy stacionárius pont. Minthogy $f'_x(x, y) = 3x^2y^5$ és $f'_y(x, y) = 5x^3y^4$, a stacionárius pontok a koordinátatengelyek pontjai amik nem esnek a tartomány belsejébe.
A $(0, 0)$ és $(1, 0)$ csúcsú él pontjai felírhatók $(x, 0)$ alakban, ahol, $x \in [0, 1]$. Így itt a $g_1(x) = f(x, 0) = 0$ függvény szélsőértékeit keressük, ami minden pontban felvevődik, és értéke 0. Hasonlóan, a $(0, 0)$ és $(0, 1)$ csúcsú él pontjai felírhatók $(0, y)$ alakban, ahol $y \in [0, 1]$. Ekkor az él pontjain f értékei $g_2(y) = f(0, y) = 0$, így minden pont szélsőértékhely. Az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ csúcsú él pontjai felírhatók $(x, 1 - x)$ alakban, ahol $x \in [0, 1]$. Itt a függvény

$g_3(x) = f(x, 1-x) = x^3(1-x)^5$. Mivel $g_3'(x) = 3x^2(1-x)^5 - 5x^3(1-x)^4 = x^2(1-x)^4(3-8x)$, melynek lehetséges szélsőértékhelyei az $x = 0$, $x = 1$ és az $x = \frac{3}{8}$ pontok. Így f lehetséges szélsőértékei az $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$ és az $f\left(\frac{3}{8}, 1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{3^3 \cdot 5^5}{8^8}$ közül kerül ki, így a megadott háromszöglapon a minimum 0, a maximum $\frac{3^3 \cdot 5^5}{8^8} = \frac{84375}{16777216}$.
A lokális szélsőértékek meghatározásához megvizsgáljuk a Hesse-determináns értékét a két koordinátatengely pontjaiban, azaz a stacionárius pontokban. Mivel $f''_{xx}(x, y) = 6xy^5$, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 15x^2y^4$, $f''_{yy}(x, y) = 20x^3y^3$, a determináns értéke mindegyik ilyen pontban 0, tehát ezen vizsgálattal nem dönthető el, hogy ezeken a helyeken f-nek van-e lokális szélsőértéke. Ettől függetlenül is látható viszont, hogy f előjele az első és harmadik negyed belsejében pozitív, míg a másik két negyed belsejében negatív, így f-nek egyik ilyen pontban sincs lokális szélsőértéke.

4. Géza a pajtája falához egy $1\,\mathrm{m}^3$ térfogatú, felülről nyitott, téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta fala alkotja, csak a maradék 3 oldalát és az alját kell elkészítenie. Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia? Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Megoldás Jelölje a szénatároló vízszintes élei közül a pajta falára merőlegesek hosszát x, a vele párhuzamosak hosszát y, és a szénatároló magasságát z. Ekkor, mivel a tároló térfogata $1\ \mathrm{m}^3$, fennáll a $xyz = 1$ egyenlőség. A tároló elkészítéséhez felhasználandó anyag arányos az elkészített felület nagyságával, így az $A = 2xz + yz + xy$ kifejezés minimumát keressük. Az $xyz = 1$ egyenlőségből $y = \frac{1}{xz}$, amiből $A = A(x, z) = 2xz + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, $x, z > 0$ adódik. Ezen kétváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjai $A'_x(x, z) = 2z - \frac{1}{x^2}$ és $A'_z(x, z) = 2x - \frac{1}{z^2}$. Mindkét derivált a $P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ pontban nulla. Megvizsgáljuk, hogy tényleg van-e lokális minimum ebben a pontban. A Hesse determináns $D(x, y) = \frac{4}{x^3z^3} - 4$, azaz $D(P) = 12 > 0$, tehát van lokális szélsőérték P-ben. Minthogy $f''_{xx}(P) = 4 > 0$, itt lokális minimum van. Az optimális téglatest méretei $x = z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y = \sqrt[3]{4}$.
Ha most a tároló alját a föld alkotja, akkor a minimalizálandó kifejezés az $A = 2xz + yz = \frac{2}{y} + \frac{1}{x}$, ahol $x, y > 0$. Ennek a kifejezésnek nincs stacionárius pontja, azaz lokális minimuma sem. Megfigyelhető az is, hogy ha x, y elegendően nagy, akkor A tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet, azaz ebben az esetben tetszőlegesen kevés anyagból tudunk egységnyi térfogatú szénatárolót építeni, ha a tároló magasságát elegendően kicsire, és a másik két méret mindegyikét elegendően nagyra tervezzük.

5. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

a) $f(x, y) = x^3 - 9x + y^2 - 6y$ b) $f(x, y) = 2x + y + \dfrac{4}{xy}$

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^3} + y^3 - \dfrac{3y}{x}$ d) $f(x, y) = y^3 - 12y + 2(x + y)^2 - 8(x + y)$

e) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy} + 8y - x$ f) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy + 9y$

Megoldás A megoldás menete megegyezik az 1) feladat megoldásainak menetével, így csak a végeredményt közöljük.
a) A stacionárius pontok $P_1(-\sqrt{3}, 3)$ és $P_2(\sqrt{3}, 3)$. A Hesse determináns értéke P_1-ben negatív és P_2-ben pozitív, így csak P_2-ben van lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(P_2) > 0$, itt lokális minimum van, melynek értéke $f(P_2) = -6\sqrt{3} - 9$.
b) Az egyetlen stacionárius pont $P(1, 2)$. Mivel $D(P) = 3 > 0$, itt van szélsőérték; mivel $f''_{xx}(P) = 4 > 0$, ez lokális minimum, melynek értéke $f(P) = 6$.
c) Az egyetlen stacionárius pont $P(1, 1)$. Minthogy $D(P) = 27 > 0$, itt van szélsőérték; mivel $f''_{xx}(P) = 6 > 0$, ez lokális minimum, melynek értéke $f(P) = -1$.
d) Két stacionárius pont van: $P_1(0, 2)$ és $P_2(4, -2)$. Most $D(P_1) = 48 > 0$ és $D(P_2) = -48 < 0$,

így egyedül P_1-ben van lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(P_1) = 4 > 0$, ez minimum, melynek értéke $f(0,2) = -24$.
e) Az egyetlen stacionárius pont $P\left(2, -\frac{1}{4}\right)$. $D(P) = 48 > 0$, tehát itt van szélsőérték. Minthogy $f''_{xx}(P) = -1 < 0$, ez lokális maximum, melynek értéke $f(P) = -6$.
f) Az egyetlen stacionárius pont $P\left(-3, \frac{3}{2}\right)$. Mivel $D(P) = -12 < 0$, a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

6. Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.

   Megoldás Feltehető, hogy a téglatest alapja a $z = 0$ síkban van. Legyen a téglatest valamelyik csúcsa $(a, b, 0)$, ahol $a, b > 0$, és $4 - a^2 - b^2 > 0$. Ekkor a téglatest alaplapjának többi csúcsa $(-a, b, 0)$, $(a, -b, 0)$ és $(-a, -b, 0)$. Így a téglatest éleinek hossza $2a, 2b, 4 - a^2 - b^2$. A térfogata $V = 4ab(4 - a^2 - b^2) = 16ab - 4a^3b - 4ab^3$. Ezen függvénynek egyetlen stacionárius pontja van $a, b > 0$ esetén: a $P(1,1)$ pont, mely belül esik a vizsgált tartományon. Minthogy $D(1,1) = 512 > 0$, itt van lokális szélsőérték, és mivel $V''_{aa}(1,1) = -24 < 0$, ez lokális maximum. Vegyük észre, hogy $a = 0$, $b = 0$ vagy $4 - a^2 - b^2 = 0$ esetén a téglatest térfogata nulla, így a térfogat a maximumát tényleg a vizsgált tartomány belsejében veszi fel, azaz P-ben abszolút maximum is van. A maximum értéke $V(1,1) = 8$, és a téglatest oldalainak hossza 2, 2 és 2.

7. Egy téglatest egy pontban összefutó éleinek összege 60 cm. Mekkorák az élek, ha a téglatest térfogata maximális?

   Megoldás Jelölje a téglatest éleinek hosszát x, y, z. Mivel az egy pontban összefutó élek összhossza 60, így $z = 60 - x - y$, ahol $0 < x, y$ és $x + y < 60$. A téglatest térfogata $V(x,y) = xy(60 - x - y)$. Ezen függvénynek egyetlen stacionárius pontja van a vizsgált tartományon: $P(20,20)$. Most $D(P) = 1200 > 0$ és $V''_{xx}(P) = -40 < 0$, tehát P-ben lokális maximum van, melynek értéke $V(20,20) = 8000$. Mivel a vizsgált tartomány határán a térfogat nulla, az előző feladathoz hasonlóan következik az is, hogy P-ban globális maximum van. Ebben a pontban a téglatest mindegyik éle 20 cm hosszú.