Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 4. hét

1. Határozzuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat!

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d)$^{\text{hf}}$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás a) Az A $(n\times n)$-es mátrix λ sajátértékei a $\det(A-\lambda E_n)=0$ egyenlet megoldásai. Oldjuk meg ezt az egyenletet a fenti mátrixra:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(5-\lambda)-2\cdot 2 = \lambda^2-7\lambda+6.$$

A kapott másodfokú polinom gyökei $\lambda_1=6$ és $\lambda_2=1$.
A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $(A-\lambda E_n)\vec{v}=\vec{0}$ egyenlet nemnulla megoldásai $\vec{v}$-re. Megoldjuk a fenti egyenletet mindkét sajátértékre. A $\lambda_1=6$-hoz tartozó sajátvektorok a

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x+2y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektoregyenlet nemnulla megoldásai, melyek tekinthetők a hozzátartozó homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásainak. Az egyenletrendszer megoldását az $A-\lambda_1E_2$ együtthatómátrixon végrehajtott Gauss-elimináció alkalmazásával is megkereshetjük.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Az ennek megfelelő egyenletrendszer megoldása $2x-y=0$, azaz $y=2x$, ahol $x\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát a $\lambda_1=6$-hoz tartozó sajátvektorok: $\vec{v}_1 = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ahol $x\neq 0$ tetszőleges. Hasonlóan kaphatóak $\lambda_2=1$-hez tartozó sajátvektorok: $\vec{v}_2 = y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, ahol $y\neq 0$ tetszőleges.

b) Az a) rész módszerét alkalmazzuk. Most a sajátértékek a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2-\lambda & -3 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3-\lambda=0$ egyenlet megoldásai, melyek $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. A $\lambda_1=0$-hoz tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_1 = z\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, $z\neq 0$ alakú vektorok. A $\lambda_2=1$-hez tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_2 = x\begin{bmatrix} 1 \\ -14 \\ -6 \end{bmatrix}$, $x\neq 0$ alakú vektorok. A $\lambda_3=-1$-hez tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_3 = y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y\neq 0$ alakú vektorok.

c) Az előzőhöz hasonlóan $\det(A-\lambda E_3)=(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(1-\lambda)$, melynek megoldásai $\lambda_1=1$ és $\lambda_2=4$. A $\lambda_1=1$-hez tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_1 = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x\neq 0$ vektorok. A $\lambda_2=4$-hez tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_2 = x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x\neq 0$ vektorok.

d) Most $\det(A-\lambda E_3)=(3-\lambda)\cdot(\lambda^2-\lambda-2)$, melynek gyökei $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$ és $\lambda_3=-1$.

A $\lambda_1 = 3$-hoz tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_1 = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $y \neq 0$ vektorok. A $\lambda_2 = 2$-höz tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_2 = z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z \neq 0$ vektorok. A $\lambda_3 = -1$-hez tartozó sajátvektorok az $\vec{v}_1 = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $y \neq 0$ vektorok.

2. Tudjuk, hogy az $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket, és a másik sajátvektort!

Megoldás Szorozzuk össze a mátrixot és a vektort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ a+1 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\vec{v}$ sajátvektor, a végeredmény $\vec{v}$ skalárszorosa, azaz a megfelelő koordinátáik aránya állandó. Tehát: $6 = a + 1$, amiből $a = 5$, és a hozzátartozó sajátérték $\lambda_1 = 6$. Helyettesítsünk vissza A-ba $a = 5$-t. és alkalmazzuk az előző feladat módszerét. Most $\det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 - 2\lambda - 24$, melynek gyökei $\lambda_1 = 6$ (ahogy láttuk már), és $\lambda_2 = -4$. A λ_1-hez tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_1 = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ vektorok. A λ_2-höz tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_2 = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ vektorok.

3. Adjuk meg az $y'' = e^{-3x} + 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását. Adjuk meg azt a partikuláris megoldást, amely eleget tesz az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeknek.

Megoldás Az általános megoldást mindkét oldal kétszeri integrálásával kapjuk.

$$y' = \int e^{-3x} + 2x\, dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + x^2 + C_1, \qquad y = \int -\frac{1}{3}e^{-3x} + x^2 + C_1\, dx = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2,$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ezen megoldások közül a megadott kezdeti feltételeket kielégítő megoldásra teljesülnek az $1 = y(0) = \frac{1}{9} + C_2$ és a $2 = y'(0) = -\frac{1}{3} + C_1$ feltételek, melyekből $C_1 = \frac{7}{3}$ és $C_2 = \frac{8}{9}$. Tehát a keresett partikuláris megoldás: $y_p = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{x^3}{3} + \frac{7x}{3} + \frac{8}{9}$.

4. Adjuk meg az $y' = \dfrac{x}{y} e^{2x - 3y^2}$ $(y \neq 0)$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás A megadott differenciálegyenlet $y' = xe^{2x} \cdot \frac{1}{ye^{3y^2}}$ alakúra hozható, tehát szétválasztható. Mivel $y \neq 0$, átrendezve az $ye^{3y^2}y' = xe^{2x}$ differenciálegyenletet kapjuk. Ennek megoldásai felírhatók a

$$\int ye^{3y^2}\, dy = \int xe^{2x}\, dx$$

implicit alakban. Elvégezve az integrálásokat (és alkalmasan választva a konstanst) ebből

$$\frac{1}{6}e^{3y^2} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{C}{6}$$

adódik, melyből az általános megoldás

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\ln\left(\left(3x - \frac{3}{2}\right)e^{2x} + C\right)}$$

5. Adjuk meg az $y' = \dfrac{y-2}{xy}$, $\quad (x \neq 0,\ y \neq 0)$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldjuk meg az $y(1) = 2$, $y(1) = 3$, illetve az $y(-1) = -3$ kezdetiérték-problémákat.

Megoldás A megadott feltételek mellett, és ha $y \neq 2$, a differenciálegyenlet a $\frac{y}{y-2} y' = \frac{1}{x}$ alakra hozható (az $y = 2$ konstans függvény megoldása az eredeti differenciálegyenletnek). Ebből

$$\int \frac{y}{y-2}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx.$$

Az integrálásokat elvégezve

$$y + 2\ln|y-2| = \ln|x| + \ln|C|,$$

ahol $C \neq 0$ tetszőleges, amiből $(y-2)^2 e^y = Cx$ adódik. Vegyük észre, hogy az $y = 2$ megoldást kapjuk $C = 0$ behelyettesítésével, így a két eset megoldásai egyesíthetők az $(y-2)^2 e^y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ alakban.
Keressük meg a megadott kezdetiérték-problémákat kielégítő megoldásokat. Az $y(1) = 2$ feltételt behelyettesítve az általános megoldásba a $C = 0$ egyenletet kapjuk, melyből $(y_1 - 2)^2 e^{y_1} = 0$, azaz $y_1 = 2$. Ha most $y(1) = 3$, akkor $e = C$, tehát az ehhez tartozó partikuláris megoldás $(y_2 - 2)^2 e^{y_2} = e$. Az utolsó feltétel $(-5)^2 e^{-3} = -C$, amiből $C = -\frac{25}{e^3}$, és $(y_3 - 2)^2 e^{y_3} = -\frac{25x}{e^3}$.

6. Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú egyenleteket:

a) $y' = \dfrac{y^2 + 4y + 9}{(x-1)(x+5)}$, $\quad (x \neq 1,\ x \neq -5)$ $\qquad$ b) $y' = (3x-1)^5 (y^2 - 4y)$

c) $y' = \dfrac{2y^2 + 3}{y} 2xe^{-4x^2}$, $\quad (y \neq 0)$

Megoldás a) Mivel a számláló sehol nem nulla, átrendezzük az egyenletet:

$$\int \frac{1}{y^2 + 4y + 9}\, dy = \int \frac{1}{(x-1)(x-5)}\, dx.$$

Mindkét oldalt integrálhatjuka racionális törtek integrálásáról tanultak alapján:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{y+2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+5| + \frac{C}{\sqrt{5}}.$$

Átrendezve, ebből:

$$\operatorname{arctg} \frac{y+2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{6} \ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C,$$

azaz az általános megoldás:

$$y = \sqrt{5} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{5}}{6} \ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C\right) - 2.$$

b) Ha $y \neq 0, 4$, akkor átrendezve

$$\int \frac{1}{y^2 - 4y}\, dy = \int (3x-1)^5\, dx,$$

amiből

$$\frac{1}{4} \ln\left|\frac{y-4}{y}\right| = \frac{1}{18}(3x-1)^6 + \frac{1}{4} \ln|C|.$$

Az általános megoldás explicit alakban:

$$y = \frac{4}{1 - Ce^{\frac{2}{9}(3x-1)^6}}.$$

Vegyük észre, hogy $C = 0$ esetén ebből megkapjuk az $y = 4$ megoldást, de emellett megoldás az $y = 0$ konstans függvény is, mely nem vonható össze a fenti általános megoldással.
c) Átrendezve és integrálva:

$$\int \frac{y}{2y^2+3}\,dy = \int 2xe^{-4x^2}\,dx,$$

melyből

$$\frac{1}{4}\ln|2y^2+3| = -\frac{1}{4}e^{-4x^2} + \frac{1}{4}\ln|C|.$$

Ebből

$$y = \pm\sqrt{\frac{Ce^{-e^{-4x^2}} - 3}{2}},$$

ahol $C > 0$.

7. A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel. Tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1600 év. A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik el 100 év alatt?

Megoldás Jelölje a rádium mennyiségét a t időpillanatban $m(t)$. A rádium bomlási sebessége $m(t)$ változási gyorsaságának, azaz idő szerinti deriváltjának (-1)-szerese. Mivel ez arányos $m(t)$-vel, így valamely konstans $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\dot{m}(t) = -\alpha m(t)$. Ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, melyet szétválasztva és integrálva:

$$\int \frac{1}{m}\,dm = \int -\alpha\,dt$$

adódik. Ebből

$$\ln|m| = -\alpha t + \ln|C|, \quad \text{azaz} \quad m(t) = Ce^{-\alpha t}.$$

Legyen $m(0) = m_0$a kezdeti mennyiség. Ezeket behelyettesítve a megoldásba $C = m_0$ adódik, tehát $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$. Most felhasználjuk azt a feltételt, hogy a rádium felezési ideje 1600 év. Ebből (t-t évben számolva): $m_0 e^{-1600\alpha} = m(1600) = \frac{m_0}{2} \Longrightarrow 2 = e^{1600\alpha}$, azaz $\alpha = \frac{\ln 2}{1600}$, vagyis $m(t) = m_0\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{1600}} = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{1600}}}$. Behelyettesítve $t = 100$-at azt kapjuk, hogy $m(100) = \frac{m_0}{2^{\frac{1}{16}}}$, tehát az eredeti mennyiség $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}$-od része (kb. $95,76\%$-a) maradt meg, és a különbözet, azaz $4,24\%$-a bomlott el.

8. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát: $y' - \dfrac{x}{x^2+4}y = 6x, \quad y(0) = 4.$

Megoldás Először kiszámoljuk az általános megoldást. A fenti egyenlet egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet, így ennek a megoldási módszerét használjuk. Az egyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet $Y' - \frac{x}{x^2+4}Y = 0$, melynek általános megoldása:

$$Y = Ce^{-\int -\frac{x}{x^2+4}\,dx} = Ce^{-\int -\frac{x}{x^2+4}\,dx} = Ce^{\frac{1}{2}\ln(x^2+4)} = C\sqrt{x^2+4}.$$

Ebből megkeressük az eredeti inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével, azaz a megoldást $y = k(x)\sqrt{x^2+4}$ alakban keresve, ahol $k(x)$ a meghatározandó függvény. Ebből $y' = k'\sqrt{x^2+4} + k\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe: $k'\sqrt{x^2+4} = 6x$ adódik, melyből $k' = \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}}$ és $k = 6\sqrt{x^2+4}$. Tehát

az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása $y = C\sqrt{x^2+4} + 6\sqrt{x^2+4} \cdot \sqrt{x^2+4} = C\sqrt{x^2+4} + 6x^2 + 24$.
Megkeressük a megadott kezdeti feltételt kielégítő megoldást. Behelyettesítve a feltételt az általános megoldásba $2C + 24 = 4$, azaz $C = -10$. Ebből a partikuláris megoldás: $y_p = 6x^2 + 24 - 10\sqrt{x^2+4}$.

9. Adjuk meg az $y' - \frac{2}{x}y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldjuk meg az $y(1) = 3$, illetve az $y(-e) = 3e^2$ kezdetiérték-problémákat.

Megoldás Az előző feladat módszerét követjük. A hozzátartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = Cx^2$. Az eredeti differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását $y = k(x)x^2$ alakban keresve $k(x) = \ln|x|$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = Cx^2 + x^2 \ln|x|$. Az első kezdetiérték-feltételből $3 = C$, tehát az első keresett partikuláris megoldás $y_1 = x^2(3 + \ln|x|)$. A második feltételből $3e^2 = Ce^2 + e^2$, amiből $C = 2$, és $y_2 = x^2(2 + \ln|x|)$.

10. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű egyenleteket:

a) $y' - 3x^2y = 6x^2$

b) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{1+x^2}, \quad (x \neq 0)$

c) $y' + \frac{5}{x}y = e^x x^{-4}, \quad (x \neq 0)$

d) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{2}{x} + \frac{3}{2}, \quad y(1) = 1$

Megoldás A négy egyenlet mindegyike elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet, így az előző feladatok módszerével megoldható. Mi csak az általános, és szükség esetén a keresett partikuláris megoldásokat adjuk meg.
a) $y = Ce^{x^3} - 2$
b) $y = \frac{C}{x^2} + \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$
c) $y = \frac{C}{x^5} + \frac{x-1}{x^5}e^x$
d) $y = \frac{C}{x} + 2 + \frac{3}{4}x$, $y_p = \frac{-7}{4x} + 2 + \frac{3}{4}x$.