Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 2. hét

1. Számítsuk ki a megadott mátrixok rangját, valamint az A, B, C mátrixok inverzét, ha létezik. A tanult módszerek közül használjunk minél többet.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C^{\text{hf}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad E^{\text{hf}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás A rangok kiszámításához sor- és oszlopműveleteket használunk.

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

$$r(B) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 3$$

$$r(C) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$r(D) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$r(E) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 0 & -2 & -24 & -20 \\ 0 & -10 & -80 & -70 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 12 & 10 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3$$

Minthogy egy négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha a determinánsa nem nulla, azaz a rangja maximális, a feladatban szereplő három négyzetes mátrix közül A és B invertálható, C nem. Ebből A inverzét adjungálttal, B inverzét sorműveletekkel határozzuk meg. Az elsőhöz az előjeles aldeterminánsok $\bar{A}_{11} = 5$, $\bar{A}_{12} = -7$, $\bar{A}_{21} = -2$ és $\bar{A}_{22} = 1$. Így az adjungált:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Másrészt $\det A = 1 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = -9$. Tehát az inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Most meghatározzuk B inverzét:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Legyen $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ és $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Oldjuk meg az 1. feladatbeli A és B mátrixokkal az $A\vec{x} = \vec{a}$ és $B\vec{x} = \vec{b}$ egyenletrendszert (egyiket Gauss-eliminációval, másikat az inverz mátrix módszerével)

   Megoldás Az első egyenletet az inverz mátrix módszerével oldjuk meg. Az $A\vec{x} = \vec{a}$ egyenletből $A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{a}$, azaz $\vec{x} = A^{-1}\vec{a}$. Tehát

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

   A $B\vec{x} = \vec{b}$ meghatározta egyenletrendszer kibővített mátrixára alkalmazzuk a Gauss-eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -24 \\ 0 & -1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

   Ebből a $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ jelölést használva a kapott egyenletek $x = -9$, $-y = 1$ és $-z = -5$. Tehát $\vec{x} = \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3. Hány független vektor választható ki közülük? Mennyi a generált altér dimenziója?

   a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ b)$^{\text{hf}}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Megoldás Mindkét kérdésre azon mátrix rangja a válasz, melynek oszlopai a megadott vektorok.
   a)

$$r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3$$

   b)

$$r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3$$

4. Oldjuk meg az $A\vec{x} = \vec{b}$ egyenletrendszert Gauss-eliminációval! Mi A rangja?

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ c)$^{\text{hf}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$

Megoldás a) Legyen $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

Mivel az utolsó sornak megfelelő egyenlet $0 \cdot x + 0 \cdot y = -6$, az egyenletrendszernek nincs megoldása. Az alapmátrix rangja 2.

b) Legyen $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Az utolsó sor egy lehetetlen feltételt ad, így az egyenletrendszernek nincs megoldása. Az alapmátrix rangja 2.

c) Legyen $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A „kinullázást” nem lehet tovább folytatni. Jelen esetben a 3. oszlopot nem sikerült nullázni. Ez azt jelenti, hogy a z szabadon választható paraméter segítségével írhatóak fel x és y értékei. Az egyenletek: $y + 2z = 3$ és $x - z = -2$, amiből $y = 3 - 2z$ és $x = z - 2$. Tehát végtelen sok megoldásunk van, melyek $\vec{x} = \begin{bmatrix} z-2 \\ 3-2z \\ z \end{bmatrix}$, ahol $z \in \mathbb{R}$ szabadon választható paraméter. Az alapmátrix rangja 2.

5. Hogyan kell α, β-t megválasztani, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása? Hát hogy végtelen sok megoldása legyen?

$$\begin{aligned} -y + 2z &= 3 \\ x + 3y &= \beta \\ -2x + \alpha y + z &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás Egy lineáris egyenletrendszernek akkor van megoldása, ha az A együttható-mátrixának rangja megegyezik az A_b kibővített mátrixának rangjával. Ha ezen felül mindkét rang megegyezik az ismeretlenek számával, akkor egyetlen egy megoldás van. Kiszámoljuk a két mátrix rangját.

$$r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & \beta \\ -2 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha+6 & 1 & 2\beta \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+6 & 1 & 2\beta \end{array}\right]\right) =$$

$$= r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2\alpha-13 & 0 & 3-4\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+6 & 1 & 2\beta \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2\alpha+13 & 0 & 4\beta-3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

Most esetekre bontással megkapjuk a végeredményt. Ha $\alpha \neq -\frac{13}{2}$, akkor $4\beta - 3$ kinullázható, és $r(A) = r(A_b) = 3$. Tehát ebben az esetben pontosan egy megoldás van. Ha $\alpha = -\frac{13}{2}$ és $\beta \neq \frac{3}{4}$, akkor $r(A) = 2 < r(A_b) = 3$, tehát nem létezik megoldás. Ha $\alpha = -\frac{13}{2}$ és $\beta = \frac{3}{4}$, akkor $r(A) = r(A_b) = 2$, tehát végtelen sok megoldás van (egy szabad paraméterrel).

6.[hf] Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Hogyan válasszuk meg az α és β paraméterek értékét úgy, hogy az $A\vec{x} = \vec{b}$ egyenletnek egyértelmű megoldása legyen; végtelen sok megoldása legyen; illetve ne legyen megoldása?

Megoldás Az előző feladat módszerét alkalmazzuk.

$$r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 8 \\ \alpha & 2 & 1 & \beta \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 8 \\ \alpha-1 & 0 & -4 & \beta \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ \alpha-1 & 0 & -4 & \beta \end{array}\right]\right) =$$

$$= r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ \alpha+3 & 0 & 0 & \beta-8 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha+3 & 0 & 0 & \beta-8 \end{array}\right]\right) =$$

Most, ha $\alpha \neq -3$, akkor az A együttható- és az A_b kibővített mátrixok rangjaira $r(A) = r(A_b) = 3$, tehát egyértelműen létezik megoldás. Ha $\alpha = -3$ és $\beta \neq 8$, akkor $r(A) = 2 < r(A_b) = 3$, azaz nincs megoldás. Ha $\alpha = -3$ és $\beta = 8$, akkor $r(A) = r(A_b) = 2$, vagyis végtelen sok megoldás van.