

FELADATOK AZ A2 (VBK) TÁRGY HALLGATÓI SZÁMÁRA
2022/23/tavaszi, 13. hét

1. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciatartományát!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} (x-1)^n & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} (x+7)^n & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (n+3)}{n^2+3} x^n \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n} & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{3n} & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} (x-2)^{2n} \end{array}$$

2. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciasugarát!

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$$

3. Adjuk meg az alábbi függvények x_0 bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{x-3}, \quad x_0 = 0; \quad x_0 = 5 & \text{b) } f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad x_0 = 2; \quad x_0 = -5 \\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{x^2+3}, \quad g(x) = \frac{x^5}{x^2+3}, \quad x_0 = 0 & \text{d) } f(x) = \frac{1}{x+7}, \quad g(x) = \frac{3x^4}{x+7}, \quad x_0 = 0 \end{array}$$

4. Írjuk fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f_1(x) = \sin 3x^2, \quad x_0 = 0 & \text{b) } f_2(x) = e^{4x}, \quad x_0 = 0; \quad x_0 = 3 \\ \text{c) } f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4, \quad x_0 = 0 & \text{d) } f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x, \quad x_0 = 0 \end{array}$$

5. Adjuk meg az $f(x) = 5x^3 e^{-3x^2}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát! Számítsuk ki $f^{(100)}(0)$ és $f^{(101)}(0)$ értékét!

6. Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését, és határozzuk meg a konvergenciasugarát (R_1 -et)! Az f függvény sorfejtésére támaszkodva írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését!

$$\text{a) } g(x) = \ln(x+3), \quad R_2 = ? \qquad \text{b) } h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}, \quad R_3 = ?$$

7. Tudjuk, hogy $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, $R = 1$.

a) Írjuk fel az $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és adjuk meg a konvergenciasugarát!

b) Az f függvény sorfejtését felhasználva adjuk meg az $\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) dx$ integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát!

Emlékeztető

- Az $f_n(x) = a_n(x-a)^n$ tagokból képzett függvénysor neve *a körüli hatványsor*. Azon x -ek halmaza, amelyekre $\sum a_n(x-a)^n$ konvergens, egy intervallum, melynek neve: *konvergenciaintervallum*. Ennek két végpontja $a-r$ és $a+r$, ahol $r = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ a *konvergenciasugár*. Időnként hasznosabb ezt így kiszámolni: $r = \left(\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)^{-1}$, ha ez a határérték létezik egyáltalán. Az f függvény $a \in \mathbb{R}$ pont körüli *Taylor-sora*: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$.